甲. 第一部分：判斷下列敘述是否正確. 如正確, 請証明. 如不正確, 請舉反例.
以下 1～8 題 任選五題作答. 每題 8分. 共 40分.

1. f_n 在 $[a,b]$ 上連續, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在 $\forall x$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

2. $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,\infty)$ 上 均匀連續 (Uniformly Continuous)

3. $Q=\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 表 $[0,1]$ 中一切有理点集. 給定 $\varepsilon>0$. 令 $I_n=(r_n-\frac{\varepsilon}{2^n}, r_n+\frac{\varepsilon}{2^n})$
$S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, 因 Q 在 $[0,1]$ 中稠密 (dense), 故 $S\supset[0,1]$.

4. $f_n(x)=nx(1-x)^n$ 在 $[0,1]$ 上均匀收斂 (Uniformly Converge).

5. $f(x,y)=\begin{cases}1, & y=x^2,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
f 在 (0.0) 点雖不連續, 但 f 沿任意方向的方向導数都存在.

6. f 在 $[a,b]$ 上連續, 則 f 在 $[a,b]$ 上 黎曼可積 (Riemann Integrable)

7. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, 則 f 在 $[0,\infty)$ 上 遞減.

8. $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(u(x,y), v(x,y))$ $\quad J_T=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$
若 $\exists\ 0<\alpha<1$, 使 $|J_T(x,y)|\le\alpha\ \ \forall (x,y)$, 則 T 必有固定点.

乙. 第二部分：論述與証明
以下第 9～15 題中. 任選四題作答. 每題 15分. 共 60分.

9. Fibonacci 数列 $\{a_n\}=\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots\}$
令 $x_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$. 試証: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 並求此極限.

10. $f(x)=\begin{cases}x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$
試就 α 之值. 討論 f 在 $[0,1]$ 上 是否有界变分 (Bounded Variation)

11. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $|x|<R$ 内收斂
試証: $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}\quad\forall\,|x|<R$.

12. $A, B\subset\mathbb{R}^n$, 定義 $d(A,B)=\inf\{\|x-y\|, x\in A, y\in B\}$. 其中
$\|x-y\|$ 表 x, y 兩点间的距離.
(a) 若 A 為緊緻集 (Compact set). B 為闭集 (Closed set). 且
$A\cap B=\phi$. 試証: $d(A,B)>0$
(b) (a) 中若只要求 A, B 為闭集, 结論是否仍然成立?

13. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$, 請在 $(0,1)$ 间適当定義 f 的函數值, 使
f 在 $(-\infty,\infty)$ 上 無窮可微.

接背面

國立臺灣大學九十三學年度碩士班招生考試試題

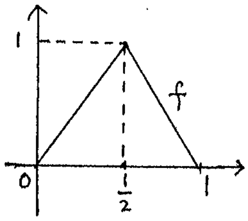
科目：高等微積分

題號：54

共2頁之第2頁

14. f 在 [0, 1] 上的圖形如右圖.

將 f 週期延拓到 $(-\infty, \infty)$ 上



(a) 請猜測 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(nx)\,dx$ 之值 (不必證明).

(b) 設 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$ 為 [0, 1] 上的一組分割.

令 χ_k 表 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的特徵函數 (Characteristic function)

給定 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$. 令 $\phi(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_k(x)$

利用 (a) 的猜測, 導出:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi(x) f(nx)\,dx = \int_0^1 \phi(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx$$

(c) 設 g 在 [0, 1] 上連續. 試証:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x) f(nx)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx$$

15. (a) 試述 Arzela - Ascoli 定理

(b) 設 f_n 在 [a, b] 上可微, $f_n(a)=0$, 且 $\int_a^b f_n'^{\,2}(x)\,dx \le 10,\ \forall n$.

試证: f_n 在 [a, b] 上均匀有界 (Uniformly Bounded)

(c) 試证: f_n 在 [a, b] 上有均匀收斂的子序列.

試題隨卷繳回