

▷ 共六題，配分如題。寫出完整論證或計算過程，只寫出答案，一律不計分。

(1) [16pt] 當我們考慮空間曲線的形狀時，並不考慮位置、旋轉、鏡射的因素。

(a) 若一空間曲線之曲率 $\kappa = 0$ ，此條件可決定曲線的形狀嗎？

(b) 若將條件換成 $\kappa = 1$ 呢？

(c) 扭率 $\tau = 0$ 呢？

(d) 扭率 $\tau = 1$ 呢？

請分開討論這四個條件，並詳細說明理由。

(2) [16pt] 考慮平面上的螺線 $\ln r = \theta$ ，其中 r, θ 為普通極坐標，請用 r 或 θ 表示此螺線每一點之曲率？

(3) [16pt] 旋轉面 (surface of revolution) Σ 有參數式

$$(\cosh u \cos \theta, \cosh u \sin \theta, \sinh u)$$

其中 $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ ，若 K 為高斯曲率，求其面積分

$$\iint_{\Sigma} K dA$$

(4) [16pt] S^2 為 $\mathbf{R}^3$ 中之單位球， $N = (0, 0, 1)$ 為其北極點，取映射 F 從 $S^2 - \{N\}$ 映到平面 $\mathbf{R}^2$ ，其中

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

請問 F 是微分同胚 (diffeomorphism) 嗎？是保角映射 (conformal map) 嗎？是保距映射 (isometry map) 嗎？

(5) [16pt] $\mathbf{R}^2$ 有可能與 $\mathbf{R}^3$ 同胚 (homeomorphic) 嗎？為什麼？

(6) [20pt] 請給出一個高斯曲率不為 0，同時既是旋轉面又是直紋曲面 (ruled surface) 的例子。

試題隨卷繳回