

(一) 考慮下列級數

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

(i) 試問：此級數在什麼範圍之內收斂。(5%)

(ii) 試求此級數之和的公式。(10%)

(二) 試求拋物線 $y = 4x^2$ 從 $x=0$ 到 $x=2$ 這一段的曲線長度 ($y > 0$)，數值應準確到小數後第3位。(15%)

(三) 試證明：對於任意複數 $z = x + iy$ (x, y 皆為實數)

$$\int_1^z \frac{dt}{t} = \ln r + i\theta \quad (15\%)$$

上式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$

(四) 試求 $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4}$ 之數值。(15%)

(五) 考慮下列微分方程

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta^2 N^2 \quad (\alpha > 0)$$

(i) 試求此方程式之通解。(15%)

(ii) 若 $N(t=0) = 10^6$ 个，時間 t 以年為單位， $\alpha = 0.01$ /年， $\beta = 0.01$ /年，試求 $t = 50$ 年時 $N(t)$ 之數值。(5%)

(六) 考慮三維歐氏空間 R^3 ，設 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 為一組正交歸一基底，而 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 為一單位向量 (即 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$)。另有兩個向量 $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$ 。試求這兩個向量投影到一個通過原點 $(0, 0, 0)$ 而法向量為 $\vec{n}$ 的平面上之後，它們的投影 (向量) 之間的夾角。(20%)