

1. 試解下列常微分方程 (認為條件不足時可作假設)

(a)

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + x^3 y = 0 \quad (15\%)$$

(b)

$$\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

式中 $f(t) = H(t-1) - H(t-2)$, Heaviside function: $H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$ (15%)

$$f(t+4) = f(t).$$

(c)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 3y + 10 \cos t \end{cases} \quad (10\%)$$

(d)

$$\frac{dy}{dx} + y = y^6 \quad (10\%)$$

2. 一條受張力的弦，長度為 π ，二端固定在同一高度，設坐標原點在弦的左端，若於 t 時間 x 坐標處的弦元素高度以 $u(x, t)$ 表示，則弦的運動遵循下列波方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

若於 $t=0$ 時，弦上點的高度 $u(x, 0) = x(\pi-x)$ ，速度 $\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0$ 。

請解上列波方程式以求 $u(x, t)$ 。 (35%)

3. 新、舊二直角坐標系統， $x'-y'$ 與 $x-y$ ，有共同原點，設一點 P 的新、舊二坐標， (x', y') 與 (x, y) ，之間的關係式為： $x = l_{11}x' + l_{12}y'$, $y = l_{21}x' + l_{22}y'$ ，

(a) 若二坐標 x' 軸與 x 軸的夾角為 θ ，請繪圖說明並求式中係數 l_{ij} 的三角函數式。 (5%)

(b) 若 L 為上列坐標關係式的係數矩陣 $[l_{ij}]$ ，則 L 的各列與各行均可視為向量，繪圖說明這些行向量與列向量的幾何意義。 (5%)

(c) 若 L^T 是 L 的轉置矩陣，請證明 $L^T L = I =$ 單位矩陣，並說明其意義。 (5%)

試題隨卷繳回