

※ 注意：請於答案卷上依序作答，並應註明作答之題號。

應用微積分（共 11 大題，總分 100 分）。

1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5 points)
 (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \underline{\hspace{2cm}}$ (5 points)
2. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (10 points)
3. $2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (10 points)
4. Find the general solution to the system which satisfies the boundary conditions
 $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$. (10 points)
 $f_1' = 5f_1 + 8f_2 + 16f_3$
 $f_2' = 4f_1 + f_2 + 8f_3$
 $f_3' = -4f_1 - 4f_2 - 11f_3$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\beta} x e^{\frac{-(x-\alpha)}{\beta}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ ($-\infty < \alpha < \infty$, and $\beta > 0$) (10 points)
6. 已知 n 個正數相加，其和為 a ，請問它們自己應該如何安排，這 n 個數的「平方和」才會最小，平方和的值又是多少？(5 points)
7. 數列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 1, a_{n+1} > a_n$ ，且 $a_{n+1}^2 + a_n^2 + 1 = 2(a_{n+1} * a_n + a_{n+1} + a_n)$ ，
 S_n 表示數列前面 n 項的總和，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n * a_n} = \underline{\hspace{2cm}}$ (10 points)。
8. $a > 0, b > 0$ ， $\int \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (10 points)
9. x_0, y_0 為參數，若 $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$ ， $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5 points)。
10. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (10 points)
11. 繪出函數 $F(a) = \int \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$ 之圖形（完整之圖形必須在關鍵座標點上標示正確的數值）。(10 points)

試題隨卷繳回