

※ 注意：請於答案卷上依序作答，並應註明作答之題號。

1. 定隨機變數  $X$  和  $Y$  分別代表個體的身高 (cm) 和體重 (kg)，由群體中針對  $X$  數值為 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162 和 164 者分別隨機抽取 10 人，再對此 10 人取其體重平均，得以下資料：

$$(\bar{y}_i, x_i) : (49, 150), (52, 152), (54, 154), (56, 156), \\ (58, 158), (60, 160), (62, 162), (65, 164)$$

$$\text{其中, } \bar{y}_i = \frac{1}{10} \sum_j y_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad j = 1, 2, \dots, 10$$

回答以下問題：

- (1) 令  $q_y$  和  $q_x$  分別代表  $(\bar{y}_i, x_i)$  資料的上四分位數 (upper quartile)，求  $q_y/q_x$  之比值。(5 分)

- (2) 定義一個 BMI 指數：

$$\text{BMI} = \text{體重} / \text{身高平方}$$

其中，體重取 kg 單位，身高取公尺(m)單位。若 BMI 超過群體之 60% 信賴區間之上限則視為肥胖。假設 BMI 的分布為常態，以上之  $(\bar{y}_i, x_i)$  為基礎，推估判定個體為肥胖的臨界值。(5 分)

- (3) 假設某一個體之身高為  $u$ ，體重為  $v$ ，定義一個 WHI 指數：

$$\text{WHI} = \frac{v/u}{q_y/q_x}$$

其中， $q_y/q_x$  定義於(1)中，為一個重高常數。定義若個體之 WHI 大於 1.015

時，視為肥胖；假設 WHI 的數值分布為常態，則由以上  $(\bar{y}_i, x_i)$  資料推估上之肥胖定義所反映的群體中有肥胖症者的百分比。(5 分)

- (4) 以上之  $(\bar{y}_i, x_i)$  資料為基礎，推估  $Y$  和  $X$  之間的回歸直線估計式為：

$$\hat{y} = -113.083 + bx$$

(15 分)

(i) 證明  $b = 1 + 14 / \left\{ \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right\}$ 。

接背面

(ii) 已知  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 168$ ,  $MSE = 0.139$ , 以此估計直線式為基礎, 定義若個體超過  $\hat{y} + 2SE(\hat{y})$ , 則判定為肥胖。畫出此肥胖臨界曲線圖。

(5) 以上資料取得為一種有偏取樣 (biased sampling), 請說明為何這樣的取樣方法不是隨機的, 是有偏的。以上題估計回歸係數為例, 估計式中須估計  $Cov(X, Y)$ , 本題之有偏取樣在何種條件下會得到和隨機取樣相同的無偏的估計值。(10分)

(6) 上述各題之分析須假設資料為常態分布。檢查資料分布是否為常態的一項作法, 是計算偏度係數, 若偏度係數接近於 0, 代表分布對稱 (常態分布的一項特性)。定義偏度係數如下:

$$r = \frac{E(x - \mu)^3}{\{E(x - \mu)^2\}^{3/2}} \quad (\mu = E(x))$$

以眾數和中位數二者位置關係 (眾數在中位數左側, 右側, 或重合), 說明  $r$  數值何時為正、負或 0。(10分)

2. 某研究者欲了解某減肥藥是否具有減輕體重之效果, 因此考慮三種減重治療方式: (1)只使用減肥藥、(2)只使用飲食控制、(3)合併使用減肥藥及飲食控制。將三十位受試者隨機分派至此三種減重治療方式並接受為期二週之治療, 並測量每位受試者治療前與治療二週後之體重, 得到下列之數據:

| 治療方式            | 受試人數 | 平均值   | 變異數     |
|-----------------|------|-------|---------|
| (1)只使用減肥藥       | 10   | $Y_1$ | $S^2_1$ |
| (2)只使用飲食控制      | 10   | $Y_2$ | $S^2_2$ |
| (3)合併使用減肥藥及飲食控制 | 10   | $Y_3$ | $S^2_3$ |

在此  $Y_j$  = 使用第  $j$  種治療方式二週後樣本平均改變之體重;

$S^2_j$  = 使用第  $j$  種治療方式二週後體重改變之樣本變異數;  $j=1, 2, 3$ 。

已知每位受試者治療二週後改變之體重皆為常態分布且有相同變異數。

由文獻得知: 減肥藥與飲食控制兩種治療效果並不相同。

(a) [10分] 在何種條件成立下,  $Y_3 - Y_2$  為估計 “使用減肥藥二週後平均改變體重” 此未知參數之一不偏估計值 (unbiased estimate)? 依據此條件, 寫出 “對治療二週後改變體重與三種減重治療方式之關係” 之一統計模式。(註: 此統計模式必須以虛擬或二元變數 (dummy or binary variables) 表示三種減重治療方式)

(b) [10 分] 延續(a)中之統計模式，針對估計“使用減肥藥二週後平均改變體重”之未知參數，請求出由  $Y_1$  與  $(Y_3 - Y_2)$  線性組合而成之一不偏估計值且其變異數為最小。請進一步說明對於估計“使用減肥藥二週後平均改變體重”之所有不偏估計值而言，此一線性組合之不偏估計值其變異數是否為最小？

(c) [10 分] 延續(a)中之統計模式，以上述所有資料( $Y_1, Y_2, Y_3, S^2_1, S^2_2, S^2_3$ )來評估此減肥藥是否具有減輕體重之效果。請寫出檢定之虛無與對立假說下之統計模式，所使用之檢定統計方法，以及建立此檢定統計方法所須之假設條件。(不須詳列推導過程)

3. 延續上題，研究者另外增加十位受試者接受只使用減肥藥為期四週之減重治療方式，得到此十位受試四週後平均改變之體重  $Y_4$ ，及樣本變異數  $S^2_4$ 。

(a) [10 分] 假設使用減肥藥之減重治療方式每一週平均可改變之體重均相同，請以資料( $Y_1, Y_4, S^2_1, S^2_4$ )估計使用減肥藥每一週平均可改變之體重的最佳不偏線性估計值(the best unbiased linear estimate)，及其變異數之估計。請寫出推導此估計值所須之統計模式與假設條件。(不須詳列運算過程)

(b) [10 分] 請檢定(a)中使用減肥藥之減重治療方式每一週平均可改變之體重均相同之假設是否成立。請寫出檢定之虛無與對立假說下之統計模式，所使用之檢定統計方法，以及建立此檢定統計方法所須之假設條件。(不須詳列運算過程)

Areas in the upper tail of the standard normal distribution

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4800 | 0.4760 | 0.4720 | 0.4680 | 0.4640 |
| 0.1 | 0.4600 | 0.4560 | 0.4520 | 0.4480 | 0.4440 | 0.4400 | 0.4360 | 0.4320 | 0.4290 | 0.4250 |
| 0.2 | 0.4210 | 0.4170 | 0.4130 | 0.4090 | 0.4050 | 0.4010 | 0.3970 | 0.3940 | 0.3900 | 0.3860 |
| 0.3 | 0.3820 | 0.3780 | 0.3740 | 0.3710 | 0.3670 | 0.3630 | 0.3590 | 0.3560 | 0.3520 | 0.3480 |
| 0.4 | 0.3450 | 0.3410 | 0.3370 | 0.3340 | 0.3300 | 0.3260 | 0.3230 | 0.3190 | 0.3160 | 0.3120 |
| 0.5 | 0.3090 | 0.3050 | 0.3020 | 0.2980 | 0.2950 | 0.2910 | 0.2880 | 0.2840 | 0.2810 | 0.2780 |
| 0.6 | 0.2740 | 0.2710 | 0.2680 | 0.2640 | 0.2610 | 0.2580 | 0.2550 | 0.2510 | 0.2480 | 0.2450 |
| 0.7 | 0.2420 | 0.2390 | 0.2360 | 0.2330 | 0.2300 | 0.2270 | 0.2240 | 0.2210 | 0.2180 | 0.2150 |
| 0.8 | 0.2120 | 0.2090 | 0.2060 | 0.2030 | 0.2000 | 0.1980 | 0.1950 | 0.1920 | 0.1890 | 0.1870 |
| 0.9 | 0.1840 | 0.1810 | 0.1790 | 0.1760 | 0.1740 | 0.1710 | 0.1690 | 0.1660 | 0.1640 | 0.1610 |
| 1.0 | 0.1590 | 0.1560 | 0.1540 | 0.1520 | 0.1490 | 0.1470 | 0.1450 | 0.1420 | 0.1400 | 0.1380 |
| 1.1 | 0.1360 | 0.1330 | 0.1310 | 0.1290 | 0.1270 | 0.1250 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| 1.2 | 0.1150 | 0.1130 | 0.1110 | 0.1090 | 0.1070 | 0.1060 | 0.1040 | 0.1020 | 0.1000 | 0.0990 |
| 1.3 | 0.0970 | 0.0950 | 0.0930 | 0.0920 | 0.0900 | 0.0890 | 0.0870 | 0.0850 | 0.0840 | 0.0820 |
| 1.4 | 0.0810 | 0.0790 | 0.0780 | 0.0760 | 0.0750 | 0.0740 | 0.0720 | 0.0710 | 0.0690 | 0.0680 |
| 1.5 | 0.0670 | 0.0660 | 0.0640 | 0.0630 | 0.0620 | 0.0610 | 0.0590 | 0.0580 | 0.0570 | 0.0560 |
| 1.6 | 0.0550 | 0.0540 | 0.0530 | 0.0520 | 0.0510 | 0.0490 | 0.0480 | 0.0470 | 0.0460 | 0.0450 |
| 1.7 | 0.0450 | 0.0440 | 0.0430 | 0.0420 | 0.0410 | 0.0400 | 0.0390 | 0.0380 | 0.0370 | 0.0360 |
| 1.8 | 0.0360 | 0.0350 | 0.0340 | 0.0330 | 0.0330 | 0.0320 | 0.0310 | 0.0310 | 0.0300 | 0.0290 |
| 1.9 | 0.0290 | 0.0280 | 0.0270 | 0.0270 | 0.0260 | 0.0260 | 0.0250 | 0.0240 | 0.0240 | 0.0230 |
| 2.0 | 0.0230 | 0.0220 | 0.0220 | 0.0210 | 0.0210 | 0.0200 | 0.0200 | 0.0190 | 0.0190 | 0.0180 |
| 2.1 | 0.0180 | 0.0170 | 0.0170 | 0.0170 | 0.0160 | 0.0160 | 0.0150 | 0.0150 | 0.0150 | 0.0140 |
| 2.2 | 0.0140 | 0.0140 | 0.0130 | 0.0130 | 0.0130 | 0.0120 | 0.0120 | 0.0120 | 0.0110 | 0.0110 |
| 2.3 | 0.0110 | 0.0110 | 0.0100 | 0.0100 | 0.0100 | 0.0090 | 0.0090 | 0.0090 | 0.0090 | 0.0080 |
| 2.4 | 0.0080 | 0.0080 | 0.0080 | 0.0080 | 0.0070 | 0.0070 | 0.0070 | 0.0070 | 0.0070 | 0.0060 |
| 2.5 | 0.0060 | 0.0060 | 0.0060 | 0.0060 | 0.0060 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0050 |
| 2.6 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 | 0.0040 |
| 2.7 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0030 |
| 2.8 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 |
| 2.9 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0020 |
| 3.0 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 |
| 3.1 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 |
| 3.2 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 |
| 3.3 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3.4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

## 國立台灣大學九十三年學年度碩士班招生考試試題

科目：生物醫學統計學(B)

題號：428

共 4 頁之第 4 頁

Percentiles of the chi-square distribution

| df | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.001 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 2.71  | 3.84  | 5.02  | 6.63  | 10.83 |
| 2  | 4.61  | 5.99  | 7.38  | 9.21  | 13.82 |
| 3  | 6.25  | 7.81  | 9.35  | 11.34 | 16.27 |
| 4  | 7.78  | 9.49  | 11.14 | 13.28 | 18.47 |
| 5  | 9.24  | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 20.52 |
| 6  | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 22.46 |
| 7  | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 24.32 |
| 8  | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 26.12 |
| 9  | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 27.88 |
| 10 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 29.59 |
| 11 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 31.26 |
| 12 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 32.91 |
| 13 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 34.53 |
| 14 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 36.12 |
| 15 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 37.70 |
| 16 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 39.25 |
| 17 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 40.79 |
| 18 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 42.31 |
| 19 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 43.82 |
| 20 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 45.31 |
| 21 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 46.80 |
| 22 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 48.27 |
| 23 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 49.73 |
| 24 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 51.18 |
| 25 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 52.62 |

Percentiles of the t distribution

| df  | 0.10  | 0.05  | 0.025  | 0.01   | 0.005  | 0.0005  |
|-----|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1   | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2   | 1.886 | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  | 31.599  |
| 3   | 1.638 | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  | 12.924  |
| 4   | 1.533 | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  | 8.610   |
| 5   | 1.476 | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  | 6.869   |
| 6   | 1.440 | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  | 5.959   |
| 7   | 1.415 | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  | 5.408   |
| 8   | 1.397 | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  | 5.041   |
| 9   | 1.383 | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  | 4.781   |
| 10  | 1.372 | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  | 4.587   |
| 11  | 1.363 | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  | 4.437   |
| 12  | 1.356 | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  | 4.318   |
| 13  | 1.350 | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  | 4.221   |
| 14  | 1.345 | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  | 4.140   |
| 15  | 1.341 | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  | 4.073   |
| 16  | 1.337 | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  | 4.015   |
| 17  | 1.333 | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  | 3.965   |
| 18  | 1.330 | 1.734 | 2.101  | 2.552  | 2.878  | 3.922   |
| 19  | 1.328 | 1.729 | 2.093  | 2.539  | 2.861  | 3.883   |
| 20  | 1.325 | 1.725 | 2.086  | 2.528  | 2.845  | 3.850   |
| 21  | 1.323 | 1.721 | 2.080  | 2.518  | 2.831  | 3.819   |
| 22  | 1.321 | 1.717 | 2.074  | 2.508  | 2.819  | 3.792   |
| 23  | 1.319 | 1.714 | 2.069  | 2.500  | 2.807  | 3.768   |
| 24  | 1.318 | 1.711 | 2.064  | 2.492  | 2.797  | 3.745   |
| 25  | 1.316 | 1.708 | 2.060  | 2.485  | 2.787  | 3.725   |
| 26  | 1.315 | 1.706 | 2.056  | 2.479  | 2.779  | 3.707   |
| 27  | 1.314 | 1.703 | 2.052  | 2.473  | 2.771  | 3.690   |
| 28  | 1.313 | 1.701 | 2.048  | 2.467  | 2.763  | 3.674   |
| 29  | 1.311 | 1.699 | 2.045  | 2.462  | 2.756  | 3.659   |
| 30  | 1.310 | 1.697 | 2.042  | 2.457  | 2.750  | 3.646   |
| 40  | 1.303 | 1.684 | 2.021  | 2.423  | 2.704  | 3.551   |
| 50  | 1.299 | 1.676 | 2.009  | 2.403  | 2.678  | 3.496   |
| 60  | 1.296 | 1.671 | 2.000  | 2.390  | 2.660  | 3.460   |
| 70  | 1.294 | 1.667 | 1.994  | 2.381  | 2.648  | 3.435   |
| 80  | 1.292 | 1.664 | 1.990  | 2.374  | 2.639  | 3.416   |
| 90  | 1.291 | 1.662 | 1.987  | 2.368  | 2.632  | 3.402   |
| 100 | 1.290 | 1.660 | 1.984  | 2.364  | 2.626  | 3.390   |
| 110 | 1.289 | 1.659 | 1.982  | 2.361  | 2.621  | 3.381   |
| 120 | 1.289 | 1.658 | 1.980  | 2.358  | 2.617  | 3.373   |
| ∞   | 1.282 | 1.645 | 1.960  | 2.327  | 2.576  | 3.291   |

試題隨卷繳回