

I、填空题（共 40 分。請按空格編號，依序作答，否則不予計分。若沒有適當答案，請填寫 無解。）

- 欲探究一行業之男、女業務員的業績中位數 η_1 、 η_2 是否相等，乃各隨機抽訪男、女業務員三十人以上，依 Mann-Whitney 檢定法得檢定統計量 Z （標準常態隨機變數）=4；若改採 Kruskal-Wallis 檢定法，則可得檢定統計量 $H=$ (1) 而得相同的檢定結論。
- 欲了解甲、乙兩品牌之電腦的操作效率，乃進行一集區實驗設計，集區數為 $n=64$ ，依 Friedman 檢定法得檢定統計量 $\chi_r^2=9$ ；若改採符號檢定法，則可得檢定統計量 $S=\min\{\text{差額為“+”的個數}, \text{差額為“-”的個數}\}=$ (2) 而得相同的檢定結論。【註：不必考慮校正】
- 已知甲商品壽命 X 分配的機率模型為 $f(x)=0.5e^{-0.5x}$ ， $x \geq 0$ 。若成本 $M=10+2X$ ，則 M 分配的眾數 $Mo=$ (3)。若售價 $Y=10X$ ，則 Y 分配的 Pearson 偏態係數 $sk=$ (4)。此 Y 分配的機率模型可稱為 (5) 分配、(6) 分配或 (7) 分配。
- 已知商家之廣告費、營業收入為隨機變數 X 、 Y ，為研究需要而分別標準化為 Z_X 、 Z_Y ，則 Z_X 、 Z_Y 乘積之期望值 $E(Z_X Z_Y)$ 的變化範圍為：(8) $\leq E(Z_X Z_Y) \leq$ (9)。
- 研發部門為了解產品之包裝 (A、B) 是否會影響銷售量，乃隨機抽出三家百貨公司 (I、II、III) 進行集區實驗設計，得一週的銷售量 Y_{ij} 分別為：(43<a<47, 31<b<35)

	I	II	III
A	43	a	47
B	b	31	35

- 若依雙因子分類變異數分析得差異平方和分別為：SSR(包裝)=228.17、SSC(公司)=14.33、SSE(誤差)=2.33。若此資料適合有母數統計分析，則可加 (10) 個 Dummy Variables 改為迴歸分析而得檢定統計量 $F=$ (11)。
- 依雙因子變異數分析之檢定得知：百貨公司不同可能不影響銷售量，欲改依單因子變異數分析作不同包裝是否會影響銷售量的檢定。假設銷售量分配適合採用有母數統計分析，則可得檢定統計量 $F=$ (12)，此 F 檢定之自由度 = (13)。若改採 t 檢定作不同包裝是否會影響銷售量的檢定，可得檢定統計量 $t=$ (14) 與臨界值作比較，而對虛無假設 $H_0: \mu_A = \mu_B$ 下結論。此單因子變異數分析亦可加 (15) 個 Dummy Variables 改為迴歸分析，得檢定統計量 $F=$ (16)。
- 假設包裝 A、B 在百貨公司之週銷售量的聯合機率函數不為二元常態分配，可求得 Spearman 等級相關係數 $r_s=$ (17) 或 Kendall 等級相關係數 $\tau=$ (18) 或 Kendall's Coefficient of Concordance $w=$ (19) 而進行統計推論。
- 假設銷售量分配不適合採用有母數統計分析，則此實驗設計資料改採無母數統計分析，則可得 Friedman 檢定法之檢定統計量 $\chi_r^2=$ (20) 而進行統計推論。

II、繪圖題 (10 分)

設不動產之投資報酬分配的標準差 $\sigma = 60$ ，為檢定平均投資報酬 $\mu = 1000$ 是否改變而進行隨機抽樣，樣本大小為 30，已知左尾臨界值 $\bar{X}_{.1} = 976$ ，右尾臨界值 $\bar{X}_{.2} = 1024$ 。今為需要而將樣本大小增為 100，則檢定力函數 (Power Function of Test) 曲線有何改變？請繪製此曲線的草圖，圖上需標示橫軸、縱軸、 $\mu = 1000$ 、 $\bar{X}_{.1}$ 、 $\bar{X}_{.2}$ ，樣本大小為 30 的曲線以虛線表示，樣本大小為 100 的曲線以實線表示之。

III、問答與計算題 (共 50 分)

1. 設 $\{X_i\}_1^5 \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Pareto}(\alpha, \sigma)$ ，其機率密度函數 pdf 為：

$$f_X(x) = \begin{cases} (\alpha/\sigma)(x/\sigma)^{-\alpha-1} & x \geq \sigma \\ 0 & \text{其他範圍} \end{cases}$$

令 Y_i 為 $\{X_i\}_1^5$ 之第 i 階順序統計量， $1 \leq i \leq 5$ ，

- (1) 求 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_5)$ 之聯合 pdf。(4 分)
 - (2) 求 (Y_1, Y_5) 之聯合 pdf。(4 分)
 - (3) 求極小統計量 Y_1 之 pdf，並註明分配名稱及參數。(4 分)
 - (4) 求樣本中位數 M_d 之 pdf。(4 分)
2. 設 $(X, Y) \sim \text{BVN}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ 為二元常態分配，
- (1) 試寫出 (X, Y) 之聯合 pdf，以及 X 與 Y 之邊際 pdf。(需註明分配名稱及參數，但不需推導。4 分)
 - (2) 試寫出條件分配 $f_{X|Y=y}$ 及 $f_{Y|X=x}$ 之 pdf。(需註明分配名稱及參數，但不需推導。(4 分)
 - (3) 以 (2) 之結果計算：期望值 $E[\text{Var}(Y|X)]$ 及變異數 $\text{Var}[E(Y|X)]$ 。(4 分)
 - (4) 以 (2)、(3) 之結果計算： X 與 Y 之相關係數 ρ_{XY} 。(4 分)
3. 設 $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ， σ^2 未知，
- (1) 試寫出 σ^2 之參數空間，並求 σ^2 之動差估計元 $\hat{\sigma}_{\text{MME}}^2$ 及最大概似估計元 $\hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2$ 。(4 分)
 - (2) 求 σ^2 之充分統計量 S ，並驗證之。(4 分)
 - (3) 求 σ^2 之 UMVUE (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)。(4 分)
 - (4) 以顯著水準 α ($0 < \alpha < 1$) 檢定虛無假設 $H_0: \sigma = \sigma_0$ vs. 對立假設 $H_1: \sigma < \sigma_0$ ，試推導一均勻最強力檢定 (Uniformly Most Powerful Test)，並說明此檢定具有何種性質？(6 分)