

I、填空题 (共 40 分。請按空格編號，依序作答，否則不予計分。若沒有適當答案，請填寫 無解。)

- 欲以 Friedman 檢定法探究甲、乙兩類股票 (處理數 $k=2$) 之投資報酬的中位數 η_1 、 η_2 是否相等，令集區數 $n>30$ ，投資報酬沒有相同數值， S 為處理一 (第一組樣本：甲類股票) 等級為「1」的集區數，則可得處理一之等級和 $R_1 = \underline{(1)}$ ，處理二之等級和 $R_2 = \underline{(2)}$ ，Friedman 檢定之檢定統計量 $\chi^2 = \underline{(3)}$ 。
- 由變異數 $\sigma^2 = 10$ 之常態母體 X 分配隨機抽取樣本大小為 n 的樣本，求算樣本平均數 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ 、樣本變異數 $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$ 。令隨機變數 $Y = 5 - 2S^2$ ，樣本大小 $n=25$ ，則 Y 分配的期望值 $E(Y) = \underline{(4)}$ 、變異數 $\text{Var}(Y) = \underline{(5)}$ 、動差法偏態係數 $\beta_1 = \underline{(6)}$ 、峰態係數 $\beta_2 = \underline{(7)}$ 。
- 令甲產品之單價、交易量為隨機變數 X 、 Y ，為研究需要而分別標準化為 Z_X 、 Z_Y ，則其共變數 $\text{Cov}(Z_X, Z_Y)$ 的變化範圍為： $\underline{(8)} \leq \text{Cov}(Z_X, Z_Y) \leq \underline{(9)}$ 。
- 為探究廣告費支出的機率模型是否是母數為 a 、 b 的 Gamma 分配而採用卡方檢定法，由隨機抽查之 50 家廠商去年的廣告費支出求得下列報表，試以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定之。

廣告費	實際次數	理論次數
25 以下	9	8
25~30	8	11
30~35	16	12
35~40	5	10
40 以上	12	9

- 可得檢定統計量 $\chi^2 = \underline{(10)}$ 與臨界值 9.49 作比較而 (11) 虛無假設 H_0 ：機率模型是母數為 a 、 b 的 Gamma 分配。此 χ^2 檢定之自由度 = (12)。若改採 Kolmogorov-Smirnov 檢定法，則可得檢定統計量 $D = \underline{(13)}$ 與臨界值作比較而可對 H_0 下結論。
- 欲探究電視廣告費與平面廣告費的關聯，乃隨機抽訪 20 家廠商，得去年各廠商的電視廣告費 X 與平面廣告費 Y 分別為：

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	19	18	17	16	15	14	13

- 假設電視廣告費與平面廣告費的聯合機率函數 $f(x, y)$ 為二元常態分配，求得 Pearson 積差相關係數 r ，則可得檢定統計量 $F = \underline{(14)}$ 與臨界值作比較，而對 H_0 ：相關係數 $\rho=0$ 下結論。
- 假設聯合機率函數 $f(x, y)$ 不為二元常態分配，求得 Spearman 等級相關係數後，可得檢定統計量 $t = \underline{(15)}$ 與臨界值作比較而對虛無假設 H_0 ： $\rho=0$ 下結論，此檢定之自由度 = (16)。亦可求得 Kendall 等級相關係數 $\hat{\tau} = \underline{(17)}$ 與臨界值作比較而對 H_0 ： $\rho=0$ 下結論。若採用 Blomqvist 雙中位數檢定法，則可得 Fisher Exact Test 之檢定統計量 $b = \underline{(18)}$ 或卡方檢定法之檢定統計量 $\chi^2 = \underline{(19)}$ 與臨界值作比較而拒絕 H_0 ： $\rho=0$ 。若改為求算 Kendall 調和係數 (Coefficient of Concordance) $w = \underline{(20)}$ 與臨界值作比較，亦可對 H_0 ： $\rho=0$ 下結論。

II、繪圖題 (10 分)

一投資獲利分配的標準差 $\sigma = 30$ ，為檢定平均獲利 $\mu = 800$ 是否改變而進行隨機抽樣，樣本大小為 36，令顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，則可求得左尾臨界值為 $\bar{X}_{.1}$ 與右尾臨界值為 $\bar{X}_{.2}$ 。今為需要而將樣本大小增為 144，則錯誤曲線 (Error Curve) 有何改變？請繪製此曲線之草圖，圖上需標示橫軸、縱軸、 $\mu = 800$ 、 $\bar{X}_{.1}$ 、 $\bar{X}_{.2}$ 、 α 、 β ，樣本大小為 36 的曲線以虛線表示，樣本大小為 144 的曲線以實線表示之。

III、問答與計算題 (共 50 分)

1. 設 $(X, Y) \sim \text{Mult}(n, p_1, p_2)$ 為三項式分配，

- (1) 試寫出此三個參數 (n, p_1, p_2) 之參數空間及說明其含意。(4 分)
- (2) 試推導：當 $Y=y$ 之條件下， $X|Y=y$ 之條件 pmf，並註明分配名稱及參數。(4 分)
- (3) 以 (2) 之結果計算：期望值 $E[\text{Var}(Y|X)]$ 及變異數 $\text{Var}[E(Y|X)]$ 。(4 分)
- (4) 計算： X 與 Y 之相關係數 ρ_{XY} ，並說明其符號合理嗎？(4 分)

2. 設 $X_1, X_2 \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\lambda=1)$ 為指數分配，令 $Y_1 = X_1 + X_2$ ， $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ ，

- (1) 求 (Y_1, Y_2) 之聯合機率密度函數 pdf。(4 分)
- (2) 求 Y_1 之邊際 pdf，並註明分配名稱及參數。(4 分)
- (3) 求 Y_1 之動差母函數 mgf。(4 分)
- (4) 求 Y_2 之邊際 pdf，並註明分配名稱及參數。(4 分)

3. 設 $\{X_i\}_1^n$ 為一組來自卜瓦松分配 $\text{Poisson}(\lambda)$ 之隨機樣本， λ 未知，

- (1) 試說明參數 λ 之含意及求 λ 之最大概似估計元 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 。(4 分)
- (2) 求 λ 之充分統計量 S ，並驗證之。(4 分)
- (3) 求 λ 之 UMVUE (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)。(4 分)
- (4) 以顯著水準 α ($0 < \alpha < 1$) 檢定虛無假設 $H_0: \lambda = \lambda_0$ vs. 對立假設 $H_1: \lambda > \lambda_0$ ，試推導一均勻最強力檢定 (Uniformly Most Powerful Test)，並說明此檢定具有何種性質？(6 分)