

一、(20分)是非題(請先說明是或非，再說明理由，未說明理由不予計分，每題4分)

1. 設 X 和 Y 均為隨機變數，已知 X 與 Y 的變異數相等 ($V(X)=V(Y)$)，則 $X+Y$ 和 $X-Y$ 必具有線性相關 (linearly correlated)。
2. 設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，自 X 中隨機抽取 n 個為一組樣本，表為 $(x_1, \dots, x_n)$ ，則 $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}$ 為自由度 n 的 t 分配。
3. 為了比較兩公司報酬的變異程度 $\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ ，某研究生以 $\frac{S}{\bar{X}}$ 為估計式 (S 與 $\bar{X}$ 分別為樣本標準差與平均數)，則 $\frac{\sigma}{\mu}$ 的信賴區間為 $\frac{S}{\bar{X}} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{V\left(\frac{S}{\bar{X}}\right)}$ 。
4. 設 $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 為二元常態分配抽出的隨機樣本，令 $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ ， r_{XY} 為樣本相關係數，則 $\hat{\beta} = r_{XY} \frac{S_X}{S_Y}$ 。
5. 設有一複迴歸模型 (Multiple regression model) 滿足古典迴歸模型的假設，若模型中解釋變數發生近似線性重合時 (near multicollinearity)，利用最小平方方法所得的估計式仍具不偏性 (unbiasedness) 與有效性 (efficiency)，因此近似線性重合的問題不重要。

二、(10分)某裝配工廠每日進行品質管制，每天從裝配線上抽取樣本 $n=10$ 個產品進行檢驗，令 X 為不良品的個數。若已知工廠每日生產的產品的不良率為 P ，但 P 並非固定， P 在 $0 \sim 0.1$ 區間為均等分配，

1. 試求 X 的期望值 $E(X)$ 。(5分)
2. 試求 X 的變異數 $V(X)$ 。(5分)

三、(10分)某學系舉辦甄試，進行面試時有二位評審：陳教授與劉教授，兩位給分均以百分為基準，但兩人給的成績鬆緊不一，現抽取 9 個面試者，

1. 請簡單說明應採用何種方法檢定二位教授面試成績是否有差異，檢定時如有必要的假設請先說明。(5分)
2. 若面試時有 5 位教授擔任評審，此時若要檢定 5 位教授給分成績是否有差異，請說明應採用何種方法進行檢定。(5分)

四、(10 分) 某生欲研究廠商海外投資對研究發展支出的影響，以了解海外投資對國內研發活動（技術升級）是否有影響，他搜集 100 家電子廠商研發支出（RD），是否有海外投資（FDI）的資料以及其他影響因素如廠商規模（以員工人數代表，SIZE），獲利情形（分三類：虧損、收支平衡、盈餘）等資料，同時已知廠商規模為二次式影響，海外投資因素會因廠商規模不同對研發支出有不同的影響。

1. 請利用上述資料幫他建立一適當的複迴歸模型（Multiple regression model）。(建立模型必須將模型中各變數及符號標示清楚，否則不予計分) (5 分)
2. 若要檢定海外投資對研發支出是否有影響，應如何檢定，請寫出兩個假設及說明檢定的統計量。(5 分)

五、(30 分) 某一位職棒選手過去十年間，每年的打擊率如下表所示：

年 度	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
打擊率	0.666	0.252	0.186	0.348	0.804	0.256	0.260	0.279	0.272	0.671

今將打擊率定義為隨機變數 Y ，其所服從之機率分配為 Beta distribution, $Y \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ，其機率密度函數為：

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \quad 0 < y < 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

1. 請推導證明 $E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ，以及 $\text{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$ (10%)
2. 經估計結果，這位職棒選手的 α 和 β 的估計值分別為 2 和 3，請繪出此選手的打擊分佈情形，並說明其打擊狀況。(5%)
3. 假設有另一位職棒選手，他的 α 和 β 的估計值分別為 4 和 6，則相對於前面第一位的選手，其打擊狀況又如何？誰的薪水應該較高？(5%)
4. 又假設另一位職棒選手，他的 α 和 β 的估計值分別為 0.2 和 0.3，則相對於前面第一位的選手，其打擊狀況又如何？(5%)
5. 九局下半，2 人出局，攻佔滿壘，身為總教練的你，會指派這三位選手中哪一個作為代打？為什麼？(5%)

六、(20 分) Let X_1 and X_2 be discrete random variables with joint pdf $f(x_1, x_2)$ given by the following table:

		x_2		
		1	2	3
x_1	1	1/12	1/6	0
	2	0	1/9	1/5
	3	1/18	1/4	2/15

1. Are X_1 and X_2 independent? Why or why not? (5%)
2. Find $P[X_1 \leq 2]$. (5%)
3. Find $P[X_1 \leq X_2]$. (5%)
4. Tabulate the conditional pdf's, $f(x_1|x_2)$ and $f(x_2|x_1)$. (5%)