國立臺灣大學95學年度碩士班招生考試試題

※ 注意：請於試卷上「選擇題作答區」依序作答。

請注意：全部爲單選題，除12及16題爲每題10%外，其餘均爲5%。其中第一大題爲線性代數，其餘各大題爲微分方程。

一、請回答下列線性代數問題 (每題 5%)：

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ -1 & 4 & 4\end{bmatrix}$ 爲一 3×3 矩陣, 請問以下敘述何者正確？
   (A) $\det(A) = 10$
   (B) A 沒有反矩陣
   (C) $\mathrm{trace}(A^{-1}) = -17$
   (D) $(A^{-1})_{23} = -1$
   (E) $(A^{-1})_{33} = 5$

2. 假設 A 與 B 均爲 n×n 矩陣，請問以下敘述何者爲非？
   (A) $\det(A) = \det(A^T)$
   (B) 若 A 爲一 orthogonal 矩陣，則 $\det(A) = 1$ 或 -1
   (C) 若 A 的反矩陣 A^{-1} 存在，則 $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
   (D) 若 B 存在反矩陣，則 $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$
   (E) 若 A 與 B 有相同的 eigenvalues，則 $A = B$

3. $A=\begin{bmatrix}c & -9 & -3 & -15\\ 0 & -7 & 0 & -6\\ 0 & 7 & 2 & 13\\ 0 & 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 爲一 4×4 矩陣，請問當 c 等於下列哪一個值時，A 不可對角化？
   (A) $c = 0$
   (B) $c = 1$
   (C) $c = 2$
   (D) $c = -1$
   (E) 以上皆非

4. $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -4 & -4\\ 5 & -2 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 5 & -5 & 5 & 9\end{bmatrix}$ 爲一 4×4 矩陣，請問以下敘述何者爲非？
   (A) A 有三個相異的 eigenvalues
   (B) -1 是 A 的一個 eigenvalue
   (C) 4 是 A 的一個 eigenvalue
   (D) $[1\ 1\ 0\ 0]^T$ 是 A 的一個 eigenvector
   (E) $[1\ 1\ 1\ 0]^T$ 是 A 的一個 eigenvector

5. 若 $T: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ 爲一 orthogonal operator，且 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$，請問以下敘述何者爲非？
   (A) A 有兩個相異的 eigenvalues

接背面

(B) 若 $\det(A)=1$，則 T 爲一旋轉運算 (rotation operator)
(C) 若 T 爲一旋轉運算，則 T^{-1} 亦爲一旋轉運算
(D) 若 $A=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}-60 & 11\\ 11 & 60\end{bmatrix}$，則 T 爲一鏡射運算 (reflection operator)，且鏡射線 (line of reflection) 在 x-y 座標上爲 $y=11x$
(E) 若 $A=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}5 & -12\\ 12 & 5\end{bmatrix}$，則 T 爲一旋轉運算，且旋轉角度在 90° 與 135° 之間

6. $A_n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n\end{bmatrix}$ 爲一 n×n 矩陣，則 $\det(A_{10})=?$
(A) 0
(B) 1
(C) -1
(D) 10
(E) 以上皆非

7. 若 A 爲一 3×3 矩陣，其 eigenvalues 爲 1, -1, 2. 若 $B=A^3-5A^2$，請問以下敘述何者爲非？
(A) -4 爲 B 的一個 eigenvalue
(B) -6 爲 B 的一個 eigenvalue
(C) $\det(B)=-192$
(D) B 可對角化
(E) 必存在一 3×3 矩陣 C，且 $C^3=B$

8. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 9 & 5 & 1\\ 9 & 8 & 7\end{bmatrix}$，請問以下敘述何者正確？
(A) A 的 rank 爲 3
(B) A 的 rank 爲 2
(C) A 的 null space 之 dimension 爲 2
(D) $[1\ 2\ 1]^T$ 是 A 的 null space 之一個基底 (basis)
(E) 以上皆非

9. 令 $G_0=0$，$G_1=1$，且對任一 $k\geq 0$，$G_{k+2}=\frac{G_k+G_{k+1}}{2}$。若 A 爲一矩陣且 $\begin{bmatrix}G_{k+2}\\ G_{k+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}G_{k+1}\\ G_k\end{bmatrix}$，請問以下敘述何者爲非？

接次頁

(A) $A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(B) 1 爲 A 的一個 eigenvalue

(C) -0.5 爲 A 的一個 eigenvalue

(D) 當 $k\to\infty$ 時，$A^k\to\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(E) 當 $k\to\infty$ 時，$G_k\to\frac{2}{3}$

10. 考慮以下四個敘述：

(甲) 若 A 爲一 m×n 矩陣，則 A 的 null space 必是 $\mathcal{R}^m$ 的 subspace

(乙) 若 A 爲一可對角化之矩陣，則對所有的正整數 k，A^k 必亦可對角化

(丙) 對任意的基本矩陣 (elementary matrix) E，必滿足 $\det(E)=\det(E^T)$

(丁) 若 W 爲 $\mathcal{R}^m$ 的一個 subspace，則對任一屬於 $\mathcal{R}^m$ 的向量 $\mathbf{v}$，必可找到一個屬於 W 的向量 $\mathbf{w}$ 及屬於 $W^\perp$ 的向量 $\mathbf{z}$，使得 $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{z}$

請問(甲)—(丁)其中有幾個敘述是正確的？

(A) 一個
(B) 二個
(C) 三個
(D) 四個
(E) 均不正確

二、考慮求出右列方程式的General solution：$4y''+36y=\csc 3x$，請回答下列問題

11. 下列何者爲非？(5%)

(A) 該方程式爲 2nd-order linear equation
(B) General solution = Complementary function + Particular solution
(C) Characteristic equation 爲 $4m^2+36=0$
(D) Complementary function 爲 $y_c=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數
(E) Particular solution 可以用 Undeterminant-coefficient approach 找到

12. 下列何者爲一Particular solution？(10%)

(A) $y_p=-\frac{1}{12}x\cos 3x+\frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|$

(B) $y_p=-\frac{1}{12}x\cos 3x+\frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\cos 3x|$

接背面

(C) $y_p = -\frac{1}{36}x\cos 3x + \frac{1}{12}(\sin 3x)\ln|\cos 3x|$

(D) $y_p = -\frac{1}{36}x\cos 3x + \frac{1}{12}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|$

(E) 以上皆非

三、就方程式 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$ 而言，請回答下列問題

13. 下列何者爲非？(5%)
    (A) 它是 Cauchy-Euler Equation
    (B) General solution = Complementary function + Particular solution
    (C) Characteristic equation 爲 $m(m-1)-2m+2=0$
    (D) Complementary function 爲 $y_c = c_1x + c_2x^3$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數
    (E) Particular solution可以爲 $y_p = 3$

14. 對於initial value $y(0) = A$ 及 $y'(0) = B$，下列敘述何者正確？(5%)
    (A) 對於 A 及 B 均爲任意數，該方程式的解均是唯一
    (B) 對於 A = 3 及 B 爲任意數，該方程式的解均是唯一
    (C) 對於 A = 3 及 B 爲任意數，該方程式的解均是無窮多個
    (D) 對於 A 及 B 均爲任意數，該方程式的解均是無窮多個
    (E) 以上皆非

四、有關求解右列的System of the differential equations $\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$

15. 下列何者爲非？(5%)
    (A) Eigenvalues爲 $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^3 = 0$
    (B) $K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是個Eigenvector
    (C) Independent Eigenvector是唯一的
    (D) 無法僅用Eigenvector將所有的解全部表示出來
    (E) 以上僅有一個答案是錯的

16. General solution 可以表示成何？其中 c_1 、 c_2 及 c_3 爲任意常數(10%)

(A) $X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}e^{2t}\right\} + c_3\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{2t}\right\}$

(B) $X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{2t}\right\} + c_3\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}e^{2t}\right\}$

(C) $X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t}\right\} + c_3\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}e^{2t}\right\}$

接次頁

(D) $X = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix}0\\-5/6\\1/6\end{bmatrix}e^{2t}\right\} + c_3\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{bmatrix}0\\-5/6\\1/6\end{bmatrix}te^{2t} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t}\right\}$

(E) 以上皆非

五、非群組題

17. 下列那一個微分方程式的解是唯一的？(5%)
   (A) $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ subject to $y(0) = 0$
   (B) $y'' + 16y = 0$ subject to $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$
   (C) $y'' + 16y = 0$ subject to $y(0) = 0$, $y(\pi/8) = 0$
   (D) $y'' + 16y = 0$ subject to $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$
   (E) 以上皆非

18. $\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$的 Laplace transform 爲何？(5%)
   (A) $\ln\frac{s-1}{s+1}$；(B) $\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}$；(C) $\frac{1}{3}\ln\frac{s-1}{s+1}$；(D) $\frac{1}{4}\ln\frac{s-1}{s+1}$；(E) 以上皆非