

請依序作答

第一部分：共七題，每題10分。

1. 以每秒 $a \text{ cm}^3$ 的速度吹一氣泡，求氣泡在半徑 $R=1$ 時表面積膨漲的速率。
2. 求曲線 $x^3 + y^3 - 3xy = 3$ 在點 $(1, 2)$ 的切線方程式。
3. $f(x) = x^4 - 4x + k$ 恆大於0，試定 k 的範圍。
4. 半徑為 a 的球，自北極至南極鑿一半徑為 b ($b < a$) 的圓孔，求所餘體積。
5. 試選定 N ，使 $\int_N^\infty e^{-x^2} dx < 10^{-3}$ 。
6. 是否存在 f, g 滿足如下方程式，如有，求 f, g 。
(a) $f_x = x + y, f_y = x - y$
(b) $g_x = x - y, g_y = x + y$
7. $f(x) = \int_x^a e^{-t^2} dt$ ，求 f 在 $0 \leq x \leq a$ 上的平均值。

第二部分：以下四題，任選二題，每題15分。

8.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

- (a) 寫出 f 的 Maclaurin 級數
 - (b) 估計 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值，使誤差 $< 10^{-3}$
9. 求單位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 與圓柱 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ 交集的體積。
 10. 曲面 $z = 101 - x^2 - 4y^2, z \geq 0$ ，邊緣 $(1.5, 0)$ 處有一小虫，欲登頂，走捷徑，問小虫路徑。
 11. $0 < x < 1$ ，試比較 $\sin x^2$ 及 $\sin^2 x$ 的大小。