國立臺灣大學九十一學年度轉學生入學考試試題

科目： 微積分(A)

題號 :19

共 一 頁之第 全 頁

(註：共五大題，每題 20 分。)

一、 設 $f(x)$ 爲定義在 $\mathbb{R}$ 上的連續函數，已知若 $x \neq 0$，則 $f'(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to 0} f'(x) = A$，請證明: $f'(0)$ 存在且其值爲 A。

二、 令

$$f(x) = \left(\begin{array}{rl} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{array} \right.$$

求 $f(x)$ 在 0 點(爲中心)的 Taylor 級數。

三、 求

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2k}+\cdots=?$$

四、 設 $\psi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 爲一映射，$\psi(x,y)=(u,v)$. 對任何點 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 以及 $r>0$,定義(以該點爲心,半徑 r 的圓盤)

$$\mathbb{B}_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\}$$

以及其在 ψ 之下的影

$$\psi(\mathbb{B}_r) = \{\psi(x,y) | (x,y)\in\mathbb{B}_r\};$$

現在令 $a(\mathbb{B}_r)$ 爲 $\mathbb{B}_r$ 的面積,$a(\psi(\mathbb{B}_r))$ 爲 $\psi(\mathbb{B}_r)$ 的面積,於是令

$$I(x_0,y_0) = \lim_{r\to 0}\frac{a(\psi(\mathbb{B}_r))}{a(\mathbb{B}_r)};$$

已知 $u=x^2-y^2, v=2xy$,對任一點 (x_0,y_0),這就定義出函數值 $I(x_0,y_0)$。請求出 (x_0,y_0),使得 $I(x_0,y_0)$ 有最小的函數值。
註：$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ 即爲二維座標平面。

五、 設 $p=p(x,y,z), q=q(x,y,z)$ 爲三個變數的函數,且其偏導函數 p_x,p_y,p_z,q_x,q_y,q_z, 皆存在且連續。令 $\mathbb{S}=\{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2=1\}$ 爲單位球面,而若 $(x,y,z)\in\mathbb{S}$,令 n 爲在其處 $\mathbb{S}$ 之向外的單位法向量。令向量場 $\mathbf{F}=(-q_z, p_z, q_x-p_y)$,請證明曲面積分

$$\int_{\mathbb{S}}\!\!\int \mathbf{F}\cdot \mathrm{n}\; dA = 0.$$

試題必須隨卷繳回