國立臺灣大學九十一學年度轉學生入學考試試題

題號 :21

科目： 微積分(B)

共 一 頁之第 全 頁

一、**填充題**（每題 9 分，8 題共 72 分） 請在答案簿首頁按題號寫下答案，其他計算式一律不計分。

1. 內接於半徑爲 7 公分的半圓的長方形，其最大可能的面積爲＿＿＿＿＿＿平方公分。

2. 在第一象限中，於 $y=\sqrt{x}$ 之下，並在 x 軸及直線 $y=x-2$ 上的區域，其面積爲＿＿＿＿＿＿。

3. 星狀曲線 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$ 的長度爲＿＿＿＿＿＿。

4. $\int_0^1 x^4 e^x dx =$＿＿＿＿＿＿。

5. 若函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續，則 $c=$＿＿＿＿＿＿，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x\ne 0;\\ c, & x=0.\end{cases}$$

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+3}\right)^n =$＿＿＿＿＿＿。

7. 平面 $x+y+z=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 交出一橢圓，原點距此橢圓最遠的距離是＿＿＿＿＿＿。

8. 曲線 $r^2=5\cos 2\theta$ 圍成區域的面積爲＿＿＿＿＿＿。

二、**計算證明題**（每題 14 分，2 題共 28 分） 請寫出詳細之計算與證明過程

9. 歐拉的 Gamma 函數定義爲：$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad x>0.$

(a) 證明 $\Gamma(1)=1$。

(b) 當 $x>0$ 時，證明 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$。

(c) 試用數學歸納法證明，當 n 是非負整數時，$\Gamma(n)=n!$ 恆成立，其中 $n!$ 表示 n 的階乘。

10. 利用均值定理證明下列二敘述。

[均值定理] 如果 $y=f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 連續，且在開區間 (a,b) 可微， 則 (a,b) 中存在一數 c 滿足

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

(a) 如果 $f'(x)=g'(x)$ 對區間 I 內的所有 x 均成立，試證，存在一常數 C 使得 $f(x)=g(x)+C$ 對 I 中的所有 x 均成立。

(b) 對什麼樣的 p,q,r，當 $[a,b]=[0,2]$ 時，下列函數滿足均值定理的假設條件?

$$f(x)=\begin{cases}3, & x=0;\\ -x^2+3x+p, & 0<x<1;\\ qx+r, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

試題必須隨卷繳回