

科目: 微積分(A)

第一部分: 計算題

以下五題, 任選三題作答.

$$1. f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

試決定 α 的範圍, 使 f 的二階導數處處連續.

$$2. \text{擺線一拱 } \Gamma: \begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}, 0 < \theta < 2\pi$$

(a) 試證 Γ 垂直 x 軸(b) 求 Γ 與 x 軸所圍領域 A 的面積(c) 將 A 對 y 軸旋轉, 求旋轉體體積.

3. (a) $C: (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ 為地平面上的曲線, 今在 C 上築籬, 於點 $(x(t), y(t))$ 上的籬高為 $f(t)$

試寫出籬笆的面積公式.

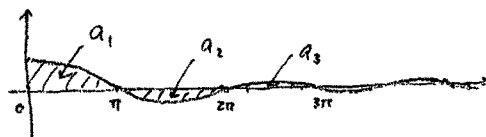
(b) 求圓柱 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ 在單位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 內的面積.

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

(a) 試證 f 在 $x=0$ 點可以 Taylor 展開, 並寫出此級數.(b) 估計 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 之值, 使誤差 $< 10^{-3}$.

$$(c) \text{ 令 } a_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right|$$

$$\text{試證: } \frac{2}{n\pi} < a_n < \frac{2}{(n+1)\pi}$$

從而判斷 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 的收斂發散.

5. $\vec{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ 為 $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ 上的向量場.

試就下列 (a), (b), (c) 三情況, 分別求 $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ 之值, 其中 C 為平面上封閉曲線, $\vec{T}$ 為 C 上逆時向單位切向量, ds 為 C 上弧元.(a) $C: x^2 + y^2 = 1$ (含原點)(b) $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ (不含原點)(c) $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ (過原點)

接背面

第二部分：推演與證明

以下五題，任選三題作答

6. 設 $f(x, y)$ 的一階偏導數連續， $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$
- (a) 試證 $\nabla f(x_0, y_0)$ 恆指出 f 在點 (x_0, y_0) 方向導數 (Directional derivative) 最大的方向。
- (b) 令 $k = f(x_0, y_0)$ ， f 的 k 等高綫 $C_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$
試證： $\nabla f(x_0, y_0)$ 垂直 C_k
7. f 在點 (x_0, y_0) 附近的二階偏導數連續。
- (a) 請寫出適當條件，以確保 f 在 (x_0, y_0) 點取極小值。
- (b) 證明你的定理。
8. (a) 欲決定 α ，使 $f(\alpha) = \int_0^1 |x^2 - \alpha| dx$ 最小。
設直綫 $y = \alpha$ 與直綫 $x = 0$ ，拋物綫 $y = x^2$
及直綫 $x = 1$ ，分別交於 A, B, C 三點 (如圖)
試證：當 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 時， $f(\alpha)$ 取最小值，從而求出 α 之值。
- (b) 決定 α ，使 $\iint_D |x^2 + y^2 - \alpha| dx dy$ 最小，其中 $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$
9. $f(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ 。
- (a) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。(b) 求 $f'(x)$ 。(c) 試證 f 在 $(0, \infty)$ 上遞減。
10. $A = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < \sqrt{2}\}$ 為 x, y 平面上的等腰直角三角形，其面積為 1， $B = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ 為 u, v 平面上單位正方形。今欲找一保面積寫像 $T: A \rightarrow B$ ，使 $T(\Omega)$ 的面積 = Ω 的面積，對一切可測集 $\Omega \subset A$ 成立。
- 想法如下：對 $0 < x < \sqrt{2}$ ，令 $\alpha(x) = A$ 在 $[0, x]$ 上的面積 (左圖斜綫域)
- 今把 A 中斜綫域映成 B 中斜綫域，使 $\overline{PQ}$ 比例映至 $\overline{P'Q'}$ (如圖所示)
- (a) 根據上述想法，請寫出 T 。
- (b) 證明 T 確為保面積寫像。

