# 國立臺灣大學九十三學年度轉學生入學考試試題

題號 :20

科目： 微積分(B)

共 1 頁之第 全 頁

**一、填充題：**(一共 9 格，每格 8 分，請依空格的標號將答案寫在答案卷上。)

1. 求極限值 $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sec x - 1}$。

2. 設 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 x 為有理數} \\ x - x^2, & \text{若 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$，問 $f$ 在哪些點連續？

3. 將長度為 $a$ 的線段切成兩段，欲使其一段的平方乘以另一段的乘積為最大，求此最大值。

4. 考慮笛卡兒蔓葉線 $2x^3 + 2y^3 = 9xy$，求通過（1, 2）點的切線斜率。

5. 設函數 $f(x) = \int_2^x e^{y^2} dy$，求 $f$ 在區間[0, 2]上的平均值。

6. 設 $F(x) = \int_{x^2}^1 (t - \sin^2 t) dt$，求二階導數 $F''(0)$。

7. 考慮三葉玫瑰線 $r = 2\sin 3\theta$，求其一葉的面積。

8. 判別無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln n)^n}$ 的收斂或發散。

9. 計算向量場 $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\cos x\,\vec{k}$ 流出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的通量(flux)。

**二、計算證明題：**(有兩大題，一共 28 分。注意：若無計算過程，不予計分。)

1. 甲乙兩人賽跑，同時出發且同時抵達終點，中間的過程互有快慢。試證必存在有某個時刻，兩人具有相同的速度。令 $f(t)$ 與 $g(t)$ 分別表示兩人在 $t$ 時刻的位置，$t \in [a, b]$，並且假設它們皆為可微分函數。(10 分)

2. (i) 設平面上的向量場 $\vec{F}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$，

   試求旋度 $\nabla \times \vec{F}$。　(4 分)

   (ii) 假設 $C$ 為平面上一條單純的封閉曲線（a simple closed curve)，不通過原點 (0, 0)，試求曲線積分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$。要分別計算：$C$ 包圍與不包圍原點的情形。（14 分)

**試題必須隨卷繳回**