

- 請依序作答, 否則不予計分
- 請詳述理由或計算推導過程, 否則不予計分

一、(5 分) 請問是否存在一常數 k 使得以下的函數 $g(x)$ 為一機率密度函數? 請求出常數 k 值。

$$g(x) = \begin{cases} kx^2 - 1 & -3 < x < 3, \\ 0 & x \text{ 為其他值} \end{cases}$$

二、給定 X, Y 為間斷隨機變數。如果條件期望值 $E(Y|X) = X$ 且 $E(X|Y) = 0$, 試求:

1. (5 分) 機率 $P(X = 0) = ?$
2. (5 分) 機率 $P(X = 1) = ?$

三、(5 分) 如果 A 及 B 為互斥事件 (mutually exclusive event), 並定義 A^c 及 B^c 分別為 A 跟 B 的補集 (complement), 試求條件機率 $P(A^c|A \cup B) = ?$

四、令 N 為一服從 Poisson(λ) 的隨機變數。若 $(X_1, X_2, \dots, X_{N+1})$ 為一組來自 Bernoulli(p) 的隨機樣本, 且 $\{X_i\}$ 與 N 相互獨立。令 $S_{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} X_i$ 。試求

1. (5 分) 期望值 $E(S_{N+1})$
2. (5 分) 變異數 $Var(S_{N+1})$

[提示]

- Poisson (λ): $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$
- Bernoulli (p): $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$

五、若有一組資料 $W_1, W_2, \dots, W_n$ 抽樣自一常態分配 $N(\mu, 1)$ 之母體, 其中 μ 為未知的母體參數。我們以 $\Phi(\cdot)$ 來表示標準常態分配的累積機率密度函數: $\Phi(a) = P(Z \leq a)$, 其中 Z 為標準常態隨機變數 (Standard Normal Random Variable)。

1. (10 分) 定義 $q = P(W_1 > k)$, 其中 k 為已知常數。試以該組樣本 $W_1, W_2, \dots, W_n$ 求得 q 的最大似估計式 (Maximum Likelihood Estimator), $\hat{q}$ 。
2. (10 分) 請找出 $\sqrt{n}(\hat{q} - q)$ 的極限分配 (Asymptotic Distribution)。

[提示] 回答本題, 需要用到下列兩性質。

- Invariance Property:

If $\hat{\tau}$ is the Maximum Likelihood Estimator (MLE) of τ and $u = u(\tau)$, then the MLE of u is $\hat{u} = u(\hat{\tau})$.

- Delta Method:

If $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ and $Y_n = c(X_n)$, where $c(\cdot)$ is continuously differentiable at θ , then

$$\sqrt{n}(Y_n - c(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, [c'(\theta)]^2 \sigma^2).$$

六、(15 分)設 X_1, X_2, X_3 分別代表成人的數學能力，語言能力與推理能力，均為常態分配且獨立，其平均數分別為 μ_1, μ_2, μ_3 ，假設變異數均相同(即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2$)，若設平均綜合能力為： $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3$ ，其中 a_1, a_2, a_3 為加權數。現若要估計 μ ，自 X_1, X_2, X_3 中分別獨立抽取 n_1, n_2, n_3 個樣本，並得 μ_1, μ_2, μ_3 的最大概似估計式為 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ ，試回答下列二小題：

- (1) 請說明如何檢定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$ (必須寫出檢定方法的名稱及簡要的過程)。
- (2) 在變異數相同的假設下，請建立信賴係數(confidence coefficient) $1 - \alpha$ 水準下 μ 的信賴區間(confidence interval)(必須寫出推導過程，只有答案不予計分)。

七、(15 分)設簡單迴歸模型為： $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$ ，以 OLS (ordinary least squares) 估計迴歸模型得 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 及 $\hat{Y}_i$ ，試求

- (1) $\hat{\beta}$ 與 β 之間的差異。
- (2) $\hat{Y}_i$ 與 $E(Y_i | X_i)$ 之差異。
- (3) 若 ε_i 不符合變異數齊一性的假設(亦即 $V(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$)，則 $\hat{\beta}$ 之變異數為何？此時如何估計 $\hat{\beta}$ 之變異數？

八、(20 分)設貨幣需求函數的迴歸方程式如下：

$$\ln m_t = \beta_0 + \beta_1 \ln(GDP_t) + \beta_2 r_t + \varepsilon_t,$$

其中 m_t 為實質的貨幣數量(quantity of real money)， GDP_t 為實質國內生產毛額， r_t 是名目年利率，若估計結果得 $\hat{\beta}_1 = 1.2$ ， $\hat{\beta}_2 = -0.02$ ， $S_{\hat{\beta}_1} = 0.1$ ， $S_{\hat{\beta}_2} = 0.02$ ， $R^2 = 0.89$ ， $T = 36$ ，試回答下列問題：

- (1) 若 GDP 由 10 兆增加至 10.2 兆， m 值的變動會為何？(請寫出數值)
- (2) 若利率由 4% 增加至 5%，則 m 值的變動會為何？(請寫出數值)
- (3) 試檢定 $H_0: \beta_1 = 1$ vs. $H_1: \beta_1 \neq 1$ 的假設，請計算 P-value。
- (4) 若欲檢定 $H_0: \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ vs. $H_1: H_0$ 不為真，應如何檢定？
- (5) 若模型設為 $m_t = \alpha_0 + \alpha_1 GDP_t + \alpha_2 r_t + V_t$ ，該模型與上述模型有何不同，你如何從此二模型中選擇較佳的模型，為什麼？請說明理由。