請標明題號，依序做答.

計算證明題

(10%) 1. 設 $f(x)=\int_1^x e^{3t}\sqrt{9t^4+1}\,dt$， $g(x)=x^n e^{3x}$. 且 $\lim_{x\to\infty}[\frac{f'(x)}{g'(x)}]=1$. 求 n 之值.

(12%) 2. 求 (a). $\lim_{x\to 0+}(\cot x-\frac{1}{x})$.

(b). 再用級數求 $\lim_{x\to 0+}(\cot x-\frac{1}{x})(\cot x+\frac{1}{x})$.

(10%) 3. 設 $f(x)=\ln x+\tan^{-1}x$, $g(x)$ 爲其反函數, 求 $g'(\frac{\pi}{4})$ 和 $g''(\frac{\pi}{4})$ 之值.

(8%) 4. $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$, 求 $f^{(6)}(0)$ 之值.

(16%) 5. 求 (a). $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

(b). $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$.

(12%) 6. 設 $z=f(x,y)$ 有連續的各二階偏導函數, 且 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 試證

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

(10%) 7. 用 Lagrange method 求 $f(x,y,z)=y+xz-2x^2-y^2-z^2$ 之極大極小值, 而要求點在 $x+y+z=35$ 之上.

(12%) 8. 用變數變換求 $\iint_R x\,dA$ 之值. 此處 R 爲第一象限內, 由 $y=x, 4x^2-y^2=4$, x 軸, $4x^2-y^2=16$ 所圍成之區域.

(10%) 9. 用 Stokes 定理求 $\iint_S (curl F\cdot n)\,dS$ 之值. 此處 $F=zi+xj+yk$; S 是曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}-1$, $z>0$; n 朝上.