

1. (20%) 計算下列微分方程組的一般解 $x(t), y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2y + 11e^t, \frac{dy}{dt} = -15x + 9y + 59e^t$$

2. (20%) 試求下列微分方程式的解：

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 8\delta(t), \text{ 其中 } \delta(t) \text{ 爲 Dirac delta function.}$$

3. (10%) 計算下列環周積分： $\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 其中 $\vec{F} = (2y^2 - 3x^2y)\hat{i} + (4xy - x^3)\hat{j}$ ，
積分的路徑環繞一圓 $x^2 + y^2 = 4$ 。

4. (20%) 給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 試求(a) A 的本徵值(eigenvalue)及其對應
的本徵向量(eigenvector)，(b) $\text{Tr}[\text{Exp}(i\pi A)] = ?$

5. (15%) 試求出下列積分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx \quad (m > 0).$$

6. (15%) Hermite polynomial $H_n(x)$ 可以表示成 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ ，且

具有正交性質 $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$ ，給定 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ，

求級數 $f(x) = \sum_{l=0}^n c_l H_l(x)$ 的展開係數 c_l 。

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right)$$