注意:

- 本試題共 8 大題, 合計 100 分。
- 請依題號依序作答。
- 請詳述理由或計算推導過程, 否則不予計分。

1. (15分) 令 $Z \sim N(0,1)$, 且令 $X = e^Z$, 則我們知道 X 的機率密度函數爲:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\left[e^{\frac{-(\ln x)^2}{2}}\right].$$

   (a) (5 分) 試寫出 X 的砥柱集合 (support)。
   (b) (10 分) 試求 X 的 m 階動差: $E(X^m)$。

2. (5 分) 若 X 與 Y 爲兩隨機變數, 且 $(\frac{X}{Y})$ 與 Y 相互獨立。試證明

$$E\left[\left(\frac{X}{Y}\right)^k\right] = \frac{E[X^k]}{E[Y^k]},$$

   其中, k 爲任意常數使得期望值 $E[\cdot]$ 存在且 $E[Y^k] \neq 0$。

3. (10 分) 令 $Y = X + \varepsilon$, 其中 X 與 ε 相互獨立, 且 X 爲服從 $U(0,1)$ 的均等分配 (uniform distribution), ε 爲服從 $N(0,\sigma^2)$ 的常態分配 (normal distribution), $\sigma \geq 0$。若以 $\Phi(\cdot)$ 表示標準常態分配的累積機率密度函數, 試求隨機變數 Y 的累積機率密度函數 (distribution function): $F(y)$。

   [提示]回答本題, 需要用到下列性質:

   - Law of Total Probability

$$P(A) = E[P(A|B)].$$

4. (10 分) 假設條件期望值爲線性函數:

$$E(Y_t|X_t) = \alpha + \beta X_t.$$

   我們定義線性迴歸模型 (linear regression model) 爲

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t, \quad E(e_t|X_t) = 0,$$

   以及線性投射模型 (linear projection model) 爲

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t, \quad E(X_t e_t) = 0.$$

   試解釋爲何線性迴歸模型只是線性投射模型的一個特例。

見背面

5. (10分) 給定 W 服從自由度爲 n 之卡方分配 (chi-squared distribution):$W \sim \chi^2(n)$, 而 U_n 服從自由度爲 n 之 $student-t$ 分配: $U_n \sim t(n)$。

   (a) (5 分) 令 $X_n = \frac{W}{n}$, 請根據 Chebyshev's inequality 找出 X_n 的機率極限 $c =?$, 亦即
   $$X_n \xrightarrow{p} c.$$

   (b) (5 分) 證明
   $$U_n \xrightarrow{d} N(0,1).$$

   [提示]

   - Chebyshev's inequality
   $$P\left(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2},$$
   where $\varepsilon > 0$.

6. (15分) 是非不定題。請判斷以下命題是否正確或者不確定, 並清楚說明理由。

   (a) (5分) 迴歸模型的 R^2 很大時, 表示解釋變數 X 和被解釋變數 Y 存在顯著的因果關係。

   (b) (5分) 爲了對迴歸係數 $\hat{\beta}$ 作假設檢定, 我們必須假設迴歸模型的誤差項爲常態分配。

   (c) (5分) 多重線性迴歸中, 解釋變數 X_1 和 X_2 高度相關將導致最小平方法估計式 (OLS estimator) 不具一致性 (inconsistent)。

7. (15分) 存在兩個母體, 母體一的均數 (mean) 和變異數 (variance) 分別爲 μ 和 σ_1^2, 母體二的均數和變異數則分別爲 μ 和 σ_2^2, 其中 σ_1^2 和 σ_2^2 爲已知, μ 爲未知數。

   (a) (10分) 由兩個母體中分別隨機抽取 n_1 和 n_2 個樣本, 並以兩個樣本平均數 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 的線性組合 $c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$ 作爲 μ 的估計式, 請求出不偏(unbiased) 且變異數最小的此種估計式。

   (b) (5分) 相較於以各自的樣本平均數 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 估計 μ, 由 (a) 求得的估計式是否較爲有效 (efficient)? 爲什麼?

8. (20分) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 爲 n 個來自以下分配的樣本,
   $$f(X) = \theta e^{-\theta X}, X \geq 0, \theta > 0$$

   (a) (5分) 求 X 的期望值 E(X)。

   (b) (5分) 使用動差法 (method of moments) 估計 θ。

   (c) (5分) 使用最大概似法 (method of maximum likelihood) 估計 θ。

   (d) (5分) 證明最大概似法估計式 $\hat{\theta}_{ML}$ 具一致性 (consistency)。

試題隨卷繳回