

I、填空题（每格 2 分，共 30 分。請按空格編號，依序作答，否則不予計分。若沒有適當答案，請填寫無解。）

- 設有 $2n-1$ 個獨立隨機變數 $X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}$ 具有相同的機率模型，期望值 $E(X_i) = \mu$ ，變異數 $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ ，令新隨機變數： $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ， $W = X_n + X_{n+1} + \dots + X_{2n-1}$ ，則可求得 Y 與 W 的共變數 $\text{Cov}(Y, W) = \underline{(1)}$ ， Y 與 W 的 Pearson 相關係數 $\rho_{YW} = \underline{(2)}$ 。

- 設隨機變數 X 的機率函數為： $f(x) = \frac{1}{10}e^{-x/10}$ ， $x \geq 0$ ， X_1, X_2 為由此分配抽出之隨機樣本，令新隨機變數 $Y = (X_1 + X_2)/10$ ，則 Y 分配的二級原動差 $\mu_2' = \underline{(3)}$ ，四級主動差 $\mu_4 = \underline{(4)}$ 。

- 欲探究 A、B 包裝之銷售量的關聯，乃進行集區數 $b = 10$ 的集區實驗設計，得一週銷售量分別為：

A	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	58	57	55	54	50	49	48	45	40	38

可求得 Spearman 等級相關係數 $r_s = \underline{(5)}$ ，Kendall 等級相關係數 $\hat{\tau} = \underline{(6)}$ ，Kendall 調和係數 (Coefficient of Concordance) $w = \underline{(7)}$ 。

- 為探究 A、B 兩行業廠商之廣告費支出的四分位距 IQR_1 、 IQR_2 是否相等，乃各隨機抽查 50 家廠商，得其去年的廣告費支出分別為 X_{1i} 、 X_{2j} ， $i, j = 1, 2, \dots, 50$ ，經求算而得部份電腦報表為：

Intervals	Probability	理論次數	A 之實際次數	B 之實際次數
$(z \leq -1)$	0.16	8	15	5
$(-1 < z \leq 0)$	0.34	17	20	10
$(0 < z \leq 1)$	0.34	17	10	20
$(z > 1)$	0.16	8	5	15

可得卡方檢定統計量 $\chi^2 = \underline{(8)}$ 與臨界值作比較，對虛無假設 H_0 ： $\underline{(9)}$ 下結論，此檢定之自由度 $v = \underline{(10)}$ 。若依 Kolmogorov-Smirnov 檢定法檢定，可得檢定統計量 $D = \underline{(11)}$ ，與臨界值作比較而下結論。

- 三個好友聚餐，大家搶著付帳，最後同意以擲銅板決定付帳者，規定：三者中不同者付帳，三者相同則再擲，令有人付帳前的擲銅板次數為隨機變數 X ，則 X 分配的期望值 $E(X) = \underline{(12)}$ ，動差法偏態係數 $\beta_1 = \underline{(13)}$ 。

- 若隨機變數 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 是抽自標準常態分配的隨機樣本，令 $\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ ，則 $n\bar{Z}^2$ 分配的變異數 $\text{Var}(n\bar{Z}^2) = \underline{(14)}$ ，動差母函數 $m(t) = \underline{(15)}$ 。

II、繪圖題（每題 10 分，共 20 分。）

1. 欲探究投資者喜歡甲投資方案的比例 p_1 是否超過乙投資方案的比例 p_2 ，乃隨機抽訪 100 位投資者，得其喜歡甲、乙投資方案的人數為：

甲 \ 乙		
	喜歡	不喜歡
喜歡	14	14
不喜歡	50	22

試建立有關 p_1 、 p_2 的虛無假設 H_0 與對立假設 H_1 。以正方形繪圖顯示此檢定之虛無假設 H_0 與對立假設 H_1 ，並註明 p_1 、 p_2 之所在位置。

2. 為探討本公司之市場佔有率 $p_0 = 0.5$ 是否下降而進行隨機抽樣，樣本大小 $n = 100$ ，令臨界值為 $\hat{p}_{*1} = 0.4$ 。今為研究需要而將臨界值改為 $\hat{p}_{*2} = 0.35$ ，則錯誤曲線有何改變？請繪製一草圖以說明此改變，圖上需標示橫軸、縱軸、 $p_0 = 0.5$ 、 $\hat{p}_{*1} = 0.4$ 及 $\hat{p}_{*2} = 0.35$ 之位置、Type I Error 之機率 α 、Type II Error 之機率 β 。臨界值為 $\hat{p}_{*1} = 0.4$ 的錯誤曲線以虛線表示，臨界值為 $\hat{p}_{*2} = 0.35$ 的錯誤曲線以實線表示之。

III、問答與計算題（50 分）

1. 設二項隨機變數 $Y = \sum_{i=1}^6 X_i \sim B(20, p)$ ，其中 $\{X_i\}_1^6$ 彼此間獨立，且已知 $X_i \sim B(i, p)$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。
- 試求 X_6 之分配（需註明分配名稱及參數）。（5 分）
 - 求 $X_1 + X_6$ 之分配（需註明分配名稱及參數），並計算期望值 $E(X_1 + X_6)^2$ 。（10 分）
2. 設 $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} U([\mu - \sqrt{2}\sigma, \mu + \sqrt{2}\sigma])$ 為一組來自均勻分配之隨機樣本，
- 試寫出 (μ, σ) 之參數空間。（2 分）
 - 求 (μ, σ) 之動差估計元，記為 $(\hat{\mu}_{MME}, \hat{\sigma}_{MME})$ 。（8 分）
 - 求 (μ, σ) 之最大概似估計元，記為 $(\hat{\mu}_{MLE}, \hat{\sigma}_{MLE})$ 。（10 分）
3. 設 $\{X_i\}_1^9 \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, 1)$ 為一組來自常態分配之隨機樣本，
- 以顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，試求虛無假設 $H_0: \mu \leq 0$ vs. 對立假設 $H_1: \mu > 0$ 之均勻最強力檢定（Uniformly Most Powerful Test）。（10 分）
 - 試說明(1)中所求之檢定具有何種好的性質？（5 分）