

※ 注意：請於試卷上「非選擇題作答區」依序作答，並應註明作答之大題及小題題號。

I、填空题（每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答，否則不予計分。若沒有適當答案，請填寫無解。）

- 兩獨立隨機變數 X_1 、 X_2 的期望值 $E(X_1) = \mu_1$ 、 $E(X_2) = \mu_2$ ，變異數 $\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2$ 、 $\text{Var}(X_2) = \sigma_2^2$ ，令 $Y = X_1 - X_2$ ，則可求得 X_1 與 Y 的共變數 $\text{Cov}(X_1, Y) = \underline{(1)}$ ， X_1 與 Y 的 Pearson 相關係數 $\rho_{X,Y} = \underline{(2)}$ 。
- 若隨機變數 X 之期望值 $E(X) = \mu$ ，變異數 $\text{Var}(X) = \sigma^2$ ，令 $Y = \frac{\mu - X}{\sigma}$ ，可求得 X, Y 乘積的期望值 $E(XY) = \underline{(3)}$ 。 Y 對 X 的迴歸係數 $\beta_1 = \underline{(4)}$ 。條件變異數 $\sigma^2(Y|X) = \underline{(5)}$ 。
- 若 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ 是抽自標準常態分配的隨機樣本，令隨機變數：

$$Y = \frac{(2X_1 - 2X_2 + \sqrt{2}X_3)^2 + (\sqrt{3}X_4 - 2X_5 - \sqrt{3}X_6)^2}{20}$$
可求得期望值 $E(Y) = \underline{(6)}$ ，動差法偏態係數 $\beta_1 = \underline{(7)}$ 。
- 若 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 是抽自標準常態分配的隨機樣本， $\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ ，令隨機變數 $X = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ ，則 X 分配的二級原動差 $\mu_2' = \underline{(8)}$ ，四級主動差 $\mu_4 = \underline{(9)}$ 。
- 甲投手投直球、下墜球、上飄球的比例為 2:3:5，又其投出直球、下墜球、上飄球為好球的機率依次為 0.9、0.8、0.7，令投至第 5 個好球出現前已投出的壞球數為隨機變數 X ，此 X 分配的變異數 $\text{Var}(X) = \underline{(10)}$ ，動差母函數 $m(x, t) = \underline{(11)}$ 。
- 設隨機變數 X 的機率函數為： $f(x) = cx^3(1-x)^2$ ， $0 \leq x \leq 1$ ，則可求得 $c = \underline{(12)}$ ，一級主動差 $\mu_1 = \underline{(13)}$ ，變異係數 (Coefficient of Variation) $CV = \underline{(14)}$ 。
- 欲探究廣告支出與銷售量是否有正相關（相關係數 $\rho > 0$ ）而隨機抽查十個案例，得廣告支出 X 與銷售量 Y 的樣本資料，經求算而得下列部份電腦報表：（令顯著水準 $\alpha = 0.05$ ）

變源	MS	F	P-值
迴歸	1226.9270	26.246	0.0009
殘差	46.7466		

可得 t 檢定統計量 $t_0 = \underline{(15)}$ 與臨界值 1.86 作比較，或以 Prob-value = $\underline{(16)}$ 與 $\alpha = 0.05$ 作比較，結論都是 $\underline{(17)}$ （拒絕或不拒絕）虛無假設 $H_0: \underline{(18)}$ 。此 t 檢定之自由度 $v = \underline{(19)}$ 。

- 研究機構欲了解 A, B 促銷方式的優劣而進行完全隨機實驗設計，A 促銷方式的樣本大小 $n_1 = 30$ 家廠商，B 促銷方式的樣本大小 $n_2 = 30$ 家廠商，年終各家廠商的業績為 Y_{ij} ， $i = 1, 2$ ， $j = 1, 2, \dots, 30$ ，經 Microsoft Excel 求算而得下列部份電腦報表：

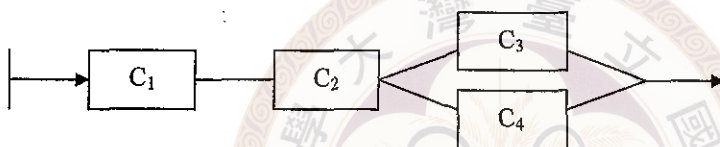
見背面

	A(1)	B(2)
平均數	a	b
變異數	16.91	29.56
假設的均數差	0	
t 統計	3.80	
$P(T \leq t)$ 單尾	0.0002	
臨界值：單尾	1.6716	

可求得共同變異數 σ^2 之不偏估計值 $\hat{\sigma}^2 =$ (20)，平均數差 $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = a - b = +$ (21)。假設業績分配皆為常態分配，令顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，可得 t 檢定統計量 $t_0 =$ (22) 與臨界值 (23) 作比較，結論：(24) (拒絕或不拒絕) 虛無假設 $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 2$ 。此 t 檢定之自由度 $v =$ (25)。

II、計算題 (50 分)

1. 設一電路系統如圖所示：



令 X_i 表電池 C_i 之壽命(以小時計)，且 $\{X_i\}_1^4 \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda=1)$ 之指數分配。令 Y 表示此電路系統之壽命。

- (1) 試推導此電路系統壽命分配 (Life Distribution) Y 之累積分配函數 cdf 及機率密度函數 pdf。(10 分)
- (2) 計算此電路系統壽命超過半個鐘頭之機率。(僅需列出機率式，不需計算其值。5 分)
2. 設 (X, Y) 為二元常態分配 $(X, Y) \sim \text{BVN}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$ ，
 - (1) 試寫出 (X, Y) 之聯合 pdf，並寫出參數空間。(3 分)
 - (2) 試寫出當 $Y = y$ 時， $X|_{Y=y}$ 之條件分配，需註明分配名稱及參數。(4 分)
 - (3) 分別寫出 X 與 $E(X|Y)$ 之變異數，記為 (a) $\text{Var}(X)$ (b) $\text{Var}[E(X|Y)]$ ，以及 (c) 期望值 $E[\text{Var}(X|Y)]$ 。(d) 並驗證以下等式：

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}[E(X|Y)]$$
 成立。(8 分)
3. 設 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為一組來自幾何分配 $\text{Geo}(p)$ 之隨機樣本 (設各 X_i 之可能值由 “1” 開始。各題中 MLE 表示最大概似估計元。)
 - (1) 試求 p 之 MLE，記為 $\hat{p}$ 。(5 分)
 - (2) 計算機率 $P(X_1 > k)$ ， k 為某固定正整數 ($k \geq 1$)，並求此機率之 MLE 估計元。(10 分)
 - (3) 當樣本大小 $n \geq 30$ ，且固定，試寫出 $\hat{p}$ 之漸近分配 (Asymptotic Distribution) (需註明分配名稱及參數)。(5 分)

※ 注意：請於試卷上「非選擇題作答區」依序作答，並應註明作答之大題及小題題號。

壹、填充題：下列共有 13 格填充題，每題 5 分，共 65 分。回答時僅需寫出題號(1)至(13)及對應之答案，無須列出計算過程。

1. 經濟體系中有商品、貨幣及債券三個市場。令 P 、 i 、 Y 和 Y_d 分別為「物價水準」、「名目利率」、「實質所得」和「可支配所得」。已知總合支出包含「消費」(C)、「投資」(I)、「政府支出」(G)、「出口」(EX)及「進口」(IM)五個來源，其中 $C = 200 + 0.6Y_d - 250i$ ， $I = 150 - 100i$ ， $G = 110$ ， $EX = 102$ ， $IM = 60 + 0.14Y$ ，而政府對消費者同時課徵「定額稅」及「所得稅」，故租稅函數為： $T = 25 + 0.1Y$ 。此外，「實質」貨幣需求函數為： $M^d/P = 300 - 500i + 0.2Y$ ，貨幣供給量為： $M^s = 900$ 。假設該經濟體系的「充分就業所得」為1,000，期初物價水準為2。
 - (a) 當商品、貨幣及債券市場同時達到均衡時，則實質所得為 (1)，名目利率為 (2)，均衡儲蓄量為 (3)。
 - (b) 若政府鼓勵民間儲蓄，使得自發性儲蓄上升10，則此時經濟體系中(會或不會) (4) 存在「節儉的矛盾」(paradox of thrift) 現象。
2. 張先生在海外經商獲利，其獲利所得換為新台幣約2,000萬元，將其全部存入了國內某商業銀行。已知存款準備率為20%，商業銀行均保留存款的5%作為「超額準備」(excess reserves)。假設一般社會大眾均不持有貨幣，且所有的商業銀行均不會有「爛頭寸」，在銀行體系不斷反覆借貸的情形之下，則上述過程將增加 (5) 元的「貨幣供給量」。又，若中央銀行在公開市場中買進債券1,000萬元，承接上述假設，經濟體系中將再(增加或減少) (6) 元的「貨幣供給量」。
3. 某消費者消費 X 與 Y 兩種財貨，令 x 與 y 分別為其消費 X 與 Y 兩種財貨的數量，其效用函數可表示為： $U(x, y) = \min\{3x + y, x + 3y, 1.5x + 1.5y\}$ ，其中 U 為效用值， $\min$ 為極小值函數。^{*}某消費者的所得為 60，又財貨 X 與 Y 的單位價格分別為 P 與 1。
 - (a) 假設 $P = 2$ ，則某消費者最適的財貨 X 消費量為 (7) 單位。
 - (b) 假設 $P = 0.25$ ，則某消費者最適的財貨 X 消費量為 (8) 單位。
4. 某生產者有兩種技術可以生產同一種產品。兩種技術均使用勞動與資本兩種生產要素。技術一的生產函數可寫成： $Q_1 = 4L_1K_1$ ，其中 Q_1 為生產之產品數量， L_1 與 K_1 分別為勞動與資本的使用量；技術二的生產函數可寫成： $Q_2 = \min\{2L_2, 0.5K_2\}$ ，其中 Q_2 為生產之產品數量， L_2 與 K_2 分別為勞動與資本的使用量。又若用技術一生產，則某生產者需花費 28 的固定成本，用技術二生產則無任何固定成本。又勞動的單位成本為 1，而資本的單位成本為 0.25。

^{*}例如對任意三實數 m 、 n 與 p 來說， $\min\{m, n, p\}$ 為三者中最小的數。