

- ☞ 依 Friedman 檢定法，因機率值 = (16) $< \alpha = 0.05$ 而拒絕虛無假設 $H_0: \eta_D = 0$ ，即 A、B 兩種不同包裝對商品銷售量可能有影響，Difference 分配之中位數 η_D 可能不為 0。此檢定有關之等級和 R_A 、 R_B 的 Spearman 等級相關係數 = (17)。
- ☞ 令 Friedman 檢定法之檢定統計量 χ_r^2 的標準化隨機變數為 Y ，則 χ_r^2 與 Y 的 Pearson 積差相關係數 = (18)，共變數 $\text{Cov}(\chi_r^2, Y) =$ (19)。
- ☞ 依 Sign 檢定法，因機率值 = (20) 與 $\alpha = 0.05$ 作比較而可對虛無假設 $H_0: \eta_D \leq 0$ 下結論。

II、公式證明 (10 分)

令 k 為獨立樣本之組數， n_i 為各組樣本大小， $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ， R_i 為各組樣本的等級和， $\bar{R}_i = R_i/n_i$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ ， $\bar{R} = \sum_{i=1}^k R_i/n$ ，試寫出 Kruskal-Wallis 檢定法之檢定統計量 H 公式，並證明之。

III、計算題 (50 分)

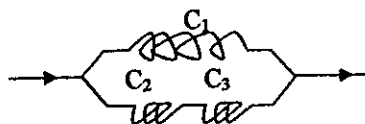
1. 設 X 與 Y 為獨立同態 (i.i.d.) 的幾何分配 $\text{Geo}(p)$ ，其共同的機率質點函數 (pmf) 為：

$$P(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{其他 } x \end{cases}$$

令 $T = X + Y$ ，求

- (1) (X, Y) 之聯合機率質點函數 (Joint pmf)。(5 分)
- (2) T 之邊際分配 (Marginal pmf)。(需註明分配名稱及參數，5 分)
- (3) 設 $X = x \in \{1, 2, \dots\}$ 已經發生，求 T 之條件分配函數 (Conditional pmf) $P_{T|X=x}(t|x)$ 。(需註明分配名稱及參數，5 分)

2. 設某一電路系統如圖所示：



令 X_i 表示每一電池 C_i 之壽命 (以小時計)，且設 $\{X_i\}_1^3 \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\lambda = 1)$ 之指數分配，令 $S = X_1 + X_2 + X_3$ ，

- (1) 計算 S 之動差母函數 (mgf)，並計算 $E(S)$ ，以及 $\text{Var}(S)$ 。(10 分)
 - (2) 計算此事件 $\{|S - E(S)| > 3\}$ 發生機率之上界。(5 分)
 - (3) 令 T 表示此電路系統之壽命，試推導 T 之累積分配函數 (cdf)。(5 分)
3. 設 $\{X_i\}_1^n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ 為一組來自常態母體之隨機樣本，令 $\hat{\sigma}^2$ 表示 σ^2 之最大概似估計元 (MLE)。
- (1) 求 $\hat{\sigma}^2$ ，並驗證 $\hat{\sigma}^2$ 為 σ^2 之均方差一致性 (Mean-squared-error consistency) 的估計元。(5 分)
 - (2) 當樣本大小 n 固定且有限 ($n < 30$)，求 $\hat{\sigma}^2$ 之抽樣分配。(需註明分配名稱及參數，5 分)
 - (3) 當樣本大小 n 很大且固定 ($n \geq 30$)，求 $\hat{\sigma}^2$ 之漸近分配 (Asymptotic distribution)。(需註明分配名稱及參數，5 分)

I、個案研究（每格 2 分，共 40 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫無解。）

- 為探究廣告費對廠商營收的影響，乃隨機抽訪 30 家高廣告費者，得各家廠商去年的營收為 X_i ， $i=1,2,\dots,30$ ；另抽訪 30 家低廣告費者，得各家的營收為 X_j ， $j=1,2,\dots,30$ 。經 Microsoft Excel 求得下列部份電腦報表：

F 檢定(兩常態母體的變異數檢定)

廣告費	高(1)	低(2)
平均數	187.00	182.00
變異數	30.00	17.65
F 統計	1.70	
$P(F > 1.70)$	0.0795	
臨界值： $F_{(0.025)}$	2.1010	

t 檢定

廣告費	高(1)	低(2)
平均數	187.00	182.00
變異數	30.00	17.65
t 統計	t_0	
$P(t > t_0)$	0.0002	
臨界值： $t_{(0.025)}$	2.0017	

假設此資料適合有母數統計分析之所有條件，並令顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

- 欲檢定高廣告費者營收之變異數與低廣告費者營收之變異數的關係，可求得檢定統計量 F 之值 $F_0 =$ (1) 與臨界值 (2) 作比較，結論為拒絕虛無假設 H_0 ：高廣告費者營收之變異數 σ_1^2 為低廣告費者營收之變異數 σ_2^2 的五倍， $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 5$ 。
- 由電腦報表之 F 檢定可知：兩營收母體分配之變異數可能皆等於 σ^2 ，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，此共同變異數 σ^2 的不偏估計量 $MSE =$ (3)，可求得檢定統計量 t 之值 $t_0 =$ (4) 與臨界值比較而拒絕虛無假設 H_0 ：兩營收母體分配的平均數相等， $\mu_1 = \mu_2$ 。此 t 檢定有關之 t 分配的動差法偏態係數 $\beta_1 =$ (5)，峰態係數 $\beta_2 =$ (6)。
- 若平均數 μ_1 、 μ_2 是否相等之檢定改採 ANOVA 之 F 檢定，可得檢定統計量 F 之值 $F_0 =$ (7) 與臨界值 (8) 作比較而下結論。此 F 檢定有關之 F 分配的一級原動差 $\mu_1' =$ (9)，一級主動差 $\mu_1 =$ (10)。
- 此兩營收母體變異數比 σ_1^2 / σ_2^2 的 95% 信賴區間為：信賴下限 = (11)、信賴上限 = (12)。
- 公司為探究 A、B 兩種不同包裝對商品銷售量的影響，乃在三十個條件相當的據點進行集區實驗設計，推出後的一週銷售量分別為 Y_{ij} (千個)， $i = A, B$ ， $j = 1, 2, \dots, 30$ 。採用統計軟體，經 Microsoft Excel 求得部份電腦報表為：

Friedman 檢定

A 包裝 Rank Sum R_A	(13)
B 包裝 Rank Sum R_B	a
Fr Stat(χ_r^2)	(14)
df	v
機率值：P-value	0.0106

Sign 檢定 (Difference = $Y_{Aj} - Y_{Bj}$)

Positive Differences 個數	c
Negative Differences 個數	22
Zero Differences 個數	0
z Stat (不校正)	+ (15)
P-value (two-tail)	p

令顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，經 Lilliefors 檢定而知母體分配不為常態分配，故依無母數統計方法作檢定。

見背面