1. 若二元隨機向量(X,Y)之聯合機率函數表示如下

$S(x, y)=\Pr(X>x, Y>y)=exp\{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\nu x y\}$，

在此 x、y、λ_1、λ_2、ν 皆為大於 0 之實數。

(1) (10 分)求出 X 與 Y 之邊際分佈函數（marginal distribution functions）。

(2) (10 分)求出 $-d\Pr(X\le x \mid X\ge x, Y\ge x)/dx$ 。

(3) (10 分)當 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 時，則 X 與 Y 之相關係數(即 coefficient of correlation，記為 Corr(X,Y)）為何?

2. 令 Z_1、Z_2、Z_3 為彼此獨立且均為標準常態分布，

$Y_1=(Z_1+Z_2+Z_3)/2$，$Y_2=(Z_1+Z_2)/2-(Z_2+Z_3)/2$，

且 $\mathbf{Z}_{1\times3}=(Z_1, Z_2, Z_3)$ 為一 1×3 隨機向量，$Y_{1\times2}=(Y_1, Y_2)$ 為一 1×2 隨機向量。

(1) (10 分)以矩陣向量形式表示 $\mathbf{Y}_{1\times2}$ 與 $\mathbf{Z}_{1\times3}$ 之關係。

(2) (10 分)以矩陣向量運算方式，計算 $\mathbf{Y}_{1\times2}$ 的 variance-covariance matrix。

3. 有一組由一個常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 群體經由隨機取樣得到的樣本 $X_i,\ i=1, 2, \cdots, n$，每個樣本的機率為：

$$f(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

由此樣本建立的概似函數為

$$L(\mu, \sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

(1)(20 分)對 $L(\mu, \sigma^2)$ 取自然對數，並進行求極大估計過程，解出 μ 和 σ^2 的最大概似估計值。

(2)(15 分)假設已知 μ 的最大概似估計值為 $\hat{\mu}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，證明 $\bar{X}$ 是 μ 的一個無偏誤的估計值。

(3)(15 分)假設已知 σ^2 的最大概似估計值為 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，證明 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的一個有偏誤的估計值。

試題隨卷繳回