1. [40 分]一硬幣 A 出現正面與反面的機率爲 p_1 與 q_1，$p_1+q_1=1$。以 $x_i=1$ 代表第 i 次投擲時出現正面情形，以 $x_i=0$ 代表第 i 次投擲時出現反面情形，則第 i 次投擲出現正面或反面的機率可以表示爲：

$$P(X_i=x_i)=p_1^{x_i}q_1^{1-x_i}, x_i=0,1$$ 。

(問題 1) 以 $X=\sum_{i=1}^{4}x_i$ 代表投擲該硬幣 A 四次出現正面的次數，推導出 X=0,1,2,3 或 4 的機率。[10 分]

相似地，若有另一硬幣 B，其第 j 次投擲出現正面或反面的機率可以表示爲：

$$P(Y_j=y_j)=p_2^{y_j}q_2^{1-y_j}, y_j=0,1$$ ，$p_2+q_2=1$。

現利用 A 和 B 二硬幣進行投擲，投擲方式爲：

(i)第一次投擲以 A 硬幣進行。
(ii)每次投擲時，若出現正面，則仍以該硬幣進行下一次投擲；若出現反面，則以另一硬幣進行下一次投擲。

(問題 2) 若依上述方法投擲 3 次，計算所有可能投擲結果出現的發生機率。並討論 p_1 和 p_2 數值大小對發生機率的影響。[15 分]
(問題 3) 依上述投擲方法，以圖示最少要投擲幾次，會發生連續三次都是投擲 B 硬幣的事件。[15 分]

2. [30 分]有一個二維函數如下：

$$f(x,y)=\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\sigma_1,\sigma_2,\rho,a,b$ 均爲常數，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,0\le\rho\le1$， a 與 b 皆爲實數。已知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$ 。

(問題 1) 若將 (x,y) 轉換爲 $(u,v)=\left(\frac{x}{\sigma_1}+\frac{y}{\sigma_2},\frac{x}{\sigma_1}-\frac{y}{\sigma_2}\right)$，則經此二元變數轉換後，求出 (u,v) 之二維函數 $g(u,v)$。[10 分]

見背面

[續上題 2]

(問題 2) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} g(u,v)\,du = ?$ [10 分]

(問題 3) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u-\frac{a}{\sigma_1}-\frac{b}{\sigma_2}\right)^2 g(u,v)\,dudv = ?$ [10 分]

3. [30 分] 考慮 一個 5×5 矩陣 A 如下：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2\rho & 2\rho & 2\rho & 2\rho \\ 2\rho & 2 & 2\rho & 2\rho & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 2 & 2\rho & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 2\rho & 2 & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 2\rho & 2\rho & 2 \end{bmatrix}$$

(問題 1) 已知 (1,1,1,1,1) 爲 A 之其中一個 eigenvector，則此 eigenvector 所對應之 eigenvalue 爲何？[10 分]

(問題 2) 證明其他四個 eigenvalues 均相同。[10 分]

(問題 3) 續問題 2，求出這四個 eigenvalues。[10 分]

試題隨卷繳回